

Prozessalgebra

Aufgabe 4-1

Präfixform

(keine Abgabe)

Wir zeigen $r, s \in \mathcal{P}_{\text{prä}} \implies$ es gibt $u \in \mathcal{P}_{\text{prä}}$ mit $\Sigma_{\text{BSP}} \vdash u = rs$ durch Induktion über den Aufbau von r .

$(r = a)$ mit $a \in \mathcal{A}$. Wähle $u \equiv rs$.

$(r = ar')$ Nach Induktionsvoraussetzung gibt es u' mit $\Sigma_{\text{BSP}} \vdash u' = rs$. Also gilt $au' = a(r's) = (ar')s = rs$ nach (P5) und den Rechenregeln für Gleichheit. Da $u' \in \mathcal{P}_{\text{prä}}$, ist auch $au' \in \mathcal{P}_{\text{prä}}$, also genügt $u := au'$ der Aussage.

$(r = r_1 + r_2)$ Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $u_1, u_2 \in \mathcal{P}_{\text{prä}}$ mit $u_1 = r_1s$ und $u_2 = r_2s$. Wähle $u \equiv u_1 + u_2$. Dann gilt in Σ_{BSP} : $u = u_1 + u_2 = r_1s + r_2s = (r_1 + r_2)s$.

Aufgabe 4-2

Charakterisierung der Bisimulation

(keine Abgabe)

a) Setze $p \equiv abc$ und $q \equiv abd$. Wir zeigen zunächst $p \simeq_2 q$.

Es gilt $c \simeq_0 d$, somit $bc \simeq_1 bd$, da $bc \xrightarrow{x} p' \implies x = b$ und $p' = c$. Es gibt nun $q' = d$ mit $p' \simeq_0 q'$ und $bd \xrightarrow{b} q'$. Genauso gilt andersherum: Aus $bd \xrightarrow{x} q'$ folgt $x = b$ und $q' = d$, und wir finden $p' \equiv c$ mit $bc \xrightarrow{b} p'$ und $p' \simeq_0 q'$.

Weiter gilt $abc \simeq_2 abd$, denn $abc \xrightarrow{x} p' \implies x = a$ und $p' = bc$. Wir finden $q' = bd$ mit $abd \xrightarrow{a} q'$ und $p' \simeq_2 q'$, wie gerade gezeigt. Analog folgt $abd \xrightarrow{x} q' \implies x = a$ und $q' = bd$; hierzu finden wir $p' = bc$ mit $abd \xrightarrow{a} p'$ und $p' \simeq_2 q'$.

Angenommen, es gilt $abc \simeq_3 abd$. Dann gilt $bc \simeq_2 bd$, da $abc \xrightarrow{a} bc$; nach Definition gibt es also q' mit $abd \xrightarrow{a} q'$ und $q' \simeq_2 bd$. Es folgt $q' = bd$, also $bc \simeq_2 bd$. Nun gilt $bc \xrightarrow{b} c$, also gibt es q'' mit $bd \xrightarrow{b} q''$ und $c \simeq_1 q''$. Aus $bd \xrightarrow{b} q''$ folgt $q'' = c$, also $c \simeq_1 d$. Dies ist aber falsch, da $c \xrightarrow{c} \checkmark$, aber $d \not\xrightarrow{c} \checkmark$.

b) Wir zeigen zunächst, dass \simeq eine Bisimulation ist; daraus folgt dann $p \simeq q \implies p \Leftrightarrow q$.

(BS1) Gelte $p \simeq q$ und $p \xrightarrow{a} p'$ mit $p' \not\equiv \checkmark$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $p \simeq_{n+1} q$, also finden wir q' mit $q \xrightarrow{a} q'$ und $p' \simeq_n q'$. Da n beliebig, also $p' \simeq_n q'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $p' \simeq q'$.

(BS2) Analog.

(BS3) Gelte $p \simeq q$ und $p \xrightarrow{a} \checkmark$. Dann gilt $p \simeq_1 q$, und damit finden wir q' mit $q' \xrightarrow{a} \checkmark$. Analog zeigt man, dass $p \xrightarrow{a} \checkmark$ impliziert, dass $q \xrightarrow{a} \checkmark$.

Wir zeigen nun, dass $p \Leftrightarrow q \implies p \simeq q$. Dazu zeigen wir, dass $p \Leftrightarrow q \implies p \simeq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion nach n .

$(n = 0)$ Klar, da $\simeq_0 = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_0$.

$(n > 0)$. Gelte die Induktionsvoraussetzung $p \Leftrightarrow q \implies p \simeq_{n-1} q$. Zu zeigen ist, dass $p \Leftrightarrow q \implies p \simeq_n q$. Wir betrachten die drei Klauseln in der Definition von \simeq_n . Gelte $p \Leftrightarrow q$, und sei β eine Bisimulation mit $(p, q) \in \beta$.

1. Gelte $p \xrightarrow{a} q$ mit $q \neq \checkmark$. Da $(p, q) \in \beta$, finden wir q' mit $q \xrightarrow{a} q'$ und $(p', q') \in \beta$. Nach I.V. gilt, wegen $p' \Leftrightarrow q'$, insbesondere $p \simeq_{n-1} q$.

2. Analog.

3. Gelte $p \xrightarrow{a} \checkmark$. Da $(p, q) \in \beta$, folgt $q \xrightarrow{a} \checkmark$ (und umgekehrt), also ist auch die dritte Bedingung in der Definition von \simeq_n erfüllt.

Aufgabe 4-3

Präfixform und Bisimulation

(8 Punkte)

a) Sei $p \equiv a(b+c)d$. Setze $p' \equiv a(bd+cd)$. Dann $p' \in \mathcal{P}_{\text{prä}}$ und $\beta = \{(a(b+c)d, a(bd+cd)), ((b+c)d, bd+cd), (d, d)\}$ ist eine Bisimulation mit $(p, p') \in \beta$. Wir haben die Folgende Herleitung: Aus (P4) folgt $(b+c)d = bd+cd$, somit $a(b+c)d = a(bd+cd)$ nach den Rechenregeln für Gleichheit.

b) Sei $p \equiv (ab+b(a+b))aa$. Setze $q \equiv a(b+a)+b(b+a)$. Dann $q \in \mathcal{P}_{\text{prä}}$ und $\beta = \{((a+b)(b+a), a(b+a)+b(b+a)), ((b+a), (b+a))\}$ ist eine Bisimulation mit $(p, q) \in \beta$.

Wir erhalten in Σ_{BSP} nach (P4), dass $(a+b)(b+a) = a(b+a)+b(b+a)$.

c) Setze $q \equiv abaa + b(aaa + baa)$. Für die Herleitung erhalten wir $(ab + b(a+b))aa \stackrel{(P4)}{=} abaa + b(a+b)aa \stackrel{(P4)}{=} abaa + b(aaa + baa)$ und der letzte Term ist in $\mathcal{P}_{\text{prä}}$. Eine Bisimulation ist $\beta = \{(ab + b(a+b))aa, abaa + b(aaa + baa)\}, (b, b), ((a+b)aa, aaa + baa), (aa, aa), (a, a)\}$.

Aufgabe 4-4

Rechenregeln für Parallelkomposition

(4 Punkte)

Es seien $p, q, r \in \mathcal{P}_1$.

a) Die Gleichheit $(p+q) \parallel r = p \parallel r + q \parallel r$ ist korrekt. Sei $\Delta_1 = \{(p, p) \mid p \in \mathcal{P}_1\}$. Wir setzen $\beta = \{((p+q) \parallel r, p \parallel r + q \parallel r) \mid p, q, r \in \mathcal{P}_1\} \cup \Delta_1$. Wir zeigen, dass β eine Bisimulation ist.

(BS1) Gelte $(p+q) \parallel r \xrightarrow{a} s$ mit $s \neq \checkmark$, so haben wir die folgenden Möglichkeiten:

1. $p \xrightarrow{a} p'$ mit $p' \neq \checkmark$ und $s = p' \parallel r$

2. $q \xrightarrow{a} q'$ mit $q' \neq \checkmark$ und $s \equiv q' \parallel r$

3. $p \xrightarrow{a} \checkmark$ und $s \equiv r$

4. $q \xrightarrow{a} \checkmark$ und $s \equiv r$.

Wir erhalten für den Prozess $(p+q) \parallel r$ entsprechend

1. $p \parallel r + q \parallel r \xrightarrow{a} p' \parallel r =: s'$

2. $p \parallel r + q \parallel r \xrightarrow{a} q' \parallel r =: s'$

3. $p \parallel r + q \parallel r \xrightarrow{a} r =: s'$

4. $p \parallel r + q \parallel r \xrightarrow{a} r =: s'$

und es gilt $(s, s') \in \beta$.

(BS2) Umgekehrt analog.

(BS3) kann nicht auftreten.

b) Die Gleichheit $(p+q) \parallel r = p \parallel r+q \parallel r$ ist im Allgemeinen falsch. Wir betrachten folgendes Gegenbeispiel: $p \equiv a$, $q \equiv b$ und $r \equiv c$. Angenommen, $(p+q) \parallel r \Leftrightarrow p \parallel r+q \parallel r$ vermöge einer Bisimulation β . Mit den Definitionen von p, q, r ergibt sich $((a+b) \parallel c, a \parallel c+b \parallel c) \in \beta$. Da $(a+b) \parallel c \xrightarrow{c} a+b$, gibt es q' mit $a \parallel c+b \parallel c \xrightarrow{c} q'$ und $(a+b, q') \in \beta$.

Da $a \parallel c+b \parallel c \xrightarrow{c} q'$ erhalten wir zwei Fälle für q' .

Fall 1: $q' = a$. Dann gilt $(a+b, a) \in \beta$, im Widerspruch zu β Bisimulation (da $a+b \xrightarrow{b} \checkmark$ aber $a \xrightarrow{b} \checkmark$ nicht möglich).

Fall 2: $q' = b$. Analog.