Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

SS 2005
Übungsblatt 6

Prozessalgebra

Aufgabe 6-1 **Korrektheit von Σ_{SKP}, Teil 1** (keine Abgabe)

Es sei $p \in \mathcal{P}_2$ und $a, b \in \mathcal{A}$.

a) Wir zeigen $a \mid b = \gamma(a,b)$, falls a, b kommunizierend, durch Angabe einer Bisimulation, nämlich $\beta = \{(a \mid b, \gamma(a,b))\}$.

(BS1) Gelte $(p,q) \in \beta$, also $p = a \mid b$ und $q = \gamma(a,b)$. Der Fall $p \xrightarrow{a} p' \neq \checkmark$ kann nicht eintreten.

(BS2) Genauso.

(BS3) Es gilt $a \mid b \xrightarrow{x} \checkmark \iff x = a \mid b \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark \iff \gamma(a,b) \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark$.

b) Wir zeigen $ap \mid b = (a \mid b)p$ durch Angabe einer Bisimulation. Sei $\beta = \{(ap \mid b, (a \mid b)p\} \cup \{(s,s) \mid s \in \mathcal{P}_2\}$. Wir zeigen, dass es sich bei β um eine Bisimulation handelt, wobei für Elemente $(s,s) \in \beta$ nichts zu zeigen ist.

(BS1) Gelta $ap \mid b \xrightarrow{x} p'$. Dann gilt nach $(T9)$, dass a, b kommunizierend, $x = \gamma(a,b)$ und $p' \equiv p$. Somit $a \mid b \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark$ und $(a \mid b)p \xrightarrow{\gamma(a,b)} p$. Da $(p,p) \in \beta$, sind wir fertig.

(BS2) Analog.

(BS3) Transitionen $ap \mid b \xrightarrow{x} \checkmark$ und $(a \mid b)p \xrightarrow{x} \checkmark$ sind nicht möglich.

Aufgabe 6-2 **Kommutativität in Σ_{SKP}** (keine Abgabe)

Es seinen $p, q, r \in \mathcal{P}_2$. Wir beginnen mit Teilaufgabe (b).

b) $p \parallel q = q \parallel p$. Die Relation $\beta = \{(p \parallel q, q \parallel p) \mid p, q \in \mathcal{P}_2\} \cup \{(p \mid q, q \mid p) \mid p, q \in \mathcal{P}_2\} \cup \{(p,p) \mid p \in \mathcal{P}_2\}$ ist eine Bisimulation, denn:

(BS1) Sei $(p \parallel q, q \parallel p \in \beta)$ und gelte $p \parallel q \xrightarrow{x} t \neq \checkmark$. Dann haben wir, gemäß (T9) oder (T10):

$$\begin{cases} p \xrightarrow{a} p', x = a, t = p' \parallel q \\ p \xrightarrow{a} \checkmark, x = a, t = q \\ q \xrightarrow{a} q', x = a, t = p \parallel q' \\ q \xrightarrow{a} \checkmark, x = a, t = p' \\ p \xrightarrow{a} p', q \xrightarrow{b} q', x = \gamma(a,b), t = p' \parallel q' \\ p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} q', x = \gamma(a,b), t = q' \\ p \xrightarrow{a} p', q \xrightarrow{b} \checkmark, x = \gamma(a,b), t = p' \end{cases} \quad \text{Wir setzen } s = \begin{cases} q \parallel p' \\ q \\ q' \parallel p \\ p' \\ q' \parallel p' \\ t = q' \\ t = p' \end{cases}$$

Dann gilt $q \parallel p \xrightarrow{x} s$ und $(t,s) \in \beta$. Wir betrachten nun den Fall $(p \mid q, q \mid p) \in \beta$. Gelte $p \mid q \xrightarrow{x} t \neq \checkmark$. Dann liegt einer der Folgenden Fälle vor:

$$\begin{cases} p \xrightarrow{a} p', q \xrightarrow{b} q', x = \gamma(a,b), t = p' \parallel q' \\ p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} q', x = \gamma(a,b), t = q' \\ p \xrightarrow{a} p', q \xrightarrow{b} \checkmark, x = \gamma(a,b), t = p' \end{cases} \quad \text{Wir setzen dann } s := \begin{cases} t = q' \parallel p' \\ q' \\ p' \end{cases}$$

Dann gilt $q \mid p \xrightarrow{x} s$ und $(t,s) \in \beta$.

(BS2) Analog.

(BS3) Wir betrachten zunächst $(p \parallel q, q \parallel p) \in \beta$. Es gilt $p \parallel q \xrightarrow{x} \checkmark \iff p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{a} \checkmark, x = \gamma(a,b) \iff q \parallel p \xrightarrow{x} \checkmark$, und für den Fall $(p \mid q, q \mid p)$ ist die Situation genauso.

a) $p \mid q = q \mid p$ ist mit der oben Angegebenen Bisimulation bereits gezeigt.

Der Kalkül Σ_{SKP} ist *nicht* vollständig, dh. es gibt Gleichheiten, die in Σ_{SKP} nicht bewiesen werden können. Insbesondere enthält Σ_{SKP} keine Regeln, die auf Terme der obigen Form angewendet werden können.

Aufgabe 6-3 **Korrektheit von Σ_{SKP}, Teil 2** (6 Punkte)

Es seinen $p, q, r \in \mathcal{P}_2$ und $a \in \mathcal{A}$.

a) Wir zeigen $a \mid bp = (a \mid b)p$ durch Angabe einer Bisimulation $\beta = \{(a \mid bp, (a \mid b)p\} \cup \{(q,q) \mid q \in \mathcal{P}_2\}$. Wir weisen nun die Bisimulationseigenschaften nach, wobei für $(q,q) \in \beta$ nichts zu zeigen ist.

(BS1) Betrachte $(a \mid bp, (a \mid b)p) \in \beta$ und gelte $a \mid bp \xrightarrow{x} t$. Dies ist nur möglich durch Anwenden der Regel (T10), dh. $x = \gamma(a,b)$ und $t = p$. Insbesondere sind dann a, b kommunizierend, weswegen $a \mid b \xrightarrow{\gamma(a,b)} \checkmark$, und damit $(a \mid b)p \xrightarrow{\gamma(a,b)} p$. Mit $s := p$ gilt also $(t,s) \in \beta$ und $(a \mid b)p \xrightarrow{x} s$.

(BS2) Analog.

(BS3) Weder $ap \mid b \xrightarrow{x} \checkmark$ noch $(a \mid b)p \xrightarrow{x} \checkmark$ sind möglich.

b) Wir zeigen $p \mid (q+r) = p \mid q + p \mid r$ durch Angabe einer Bisimulation. Setze $\beta = \{(p \mid (q+r), p \mid q + p \mid r)\} \cup \{(t,t) \mid t \in \mathcal{P}_2\}$. Für Elemente der form $(t,t) \in \beta$ ist nichts zu zeigen. Für alle anderen folgen die Bisimulationseigenschaften folgendermassen:

(BS1) Betrachte $(p \mid (q+r), p \mid q + p \mid r) \in \beta$ und gelte $p \mid (q+r) \xrightarrow{x} t$. Dies kann nur durch Anwenden der Regel (T9) oder (T10) geschehen sein, deshalb haben wir die Fälle

$$\begin{cases} p \xrightarrow{a} p', q \xrightarrow{b} q', x = \gamma(a,b), t = p' \parallel q' \\ p \xrightarrow{a} p', r \xrightarrow{b} r', x = \gamma(a,b), t = p' \parallel r' \\ p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} q', x = \gamma(a,b), t = q' \\ p \xrightarrow{a} \checkmark, r \xrightarrow{b} r', x = \gamma(a,b), t = r' \\ p \xrightarrow{a} p', q \xrightarrow{b} \checkmark, x = \gamma(a,b), t = p' \\ p \xrightarrow{a} p', r \xrightarrow{b} \checkmark, x = \gamma(a,b), t = p' \end{cases} \quad \text{Wir setzen dann } s := \begin{cases} p' \parallel q' \\ p' \parallel r' \\ q' \\ r' \\ p' \\ p' \end{cases}$$

Dann gilt $p \mid q + p \mid r \xrightarrow{x} s$ und $(t,s) \in \beta$.

(BS2) Analog.

(BS3) Wir haben $p \mid (q+r) \xrightarrow{x} \checkmark \iff \begin{cases} p \xrightarrow{a} \checkmark, q \xrightarrow{b} \checkmark, x = \gamma(a,b) \\ p \xrightarrow{a} \checkmark, r \xrightarrow{b} \checkmark, x = \gamma(a,b) \end{cases} \iff p \mid q + p \mid r \xrightarrow{x} \checkmark$.

Aufgabe 6-4 **Erzeuger/Verbraucher** (6 Punkte)

Wir bezeichen den Erzeuger mit E, den Verbraucher mit V und den Puffer mit P und betrachten die folgenden atomaren Aktionen.

- p produzieren
- c konsumieren
- s senden E $\rightarrow$ P
- $\bar{s}$: Empfangen $p \leftarrow E$
- e senden $P \rightarrow V$
- $\bar{e}$ empfangen $V \leftarrow P$

Wir erhalten dann

$$E = (ps)^\omega \qquad V = (\bar{e}c)^\omega \qquad P = \bar{s}(e\bar{s} + \bar{s}e)^\omega$$

für die einzelnen Prozesse, wobei die Definition von P sicherstellt, dass P maximal zwei Elemente speichern kann. Das gesamtsystem wird dann durch $\partial_{\{e,\bar{e},s\bar{s}}(E \parallel P \parallel V)$ modelliert. Beachte, das die Restriktion nötlig ist, um die Kommunikation zwischen den einzelnen Parteien zu erzwingen.

Besprechung von 6-1, 6-2: 18.5.2005; **Abgabe und Besprechung 6-3, 6-4**: 25.5.2005.