Prozessalgebra

Aufgabe 7-1 **Bisimilarität und Restriktion I** (keine Abgabe)

a) Sei $p \equiv \partial_{\{a\}}(a_\gamma a + \overline{a})$. Mit $q \equiv a_\gamma \delta + \overline{a}$ gilt $q \in \mathcal{P}_0^\delta$ und

$$\begin{aligned} p &= \partial_{\{}\overline{a}\}(a_\gamma a) + \partial_{\{}\overline{a}\}\overline{a} && (P21)\\ &= \partial_{\{}\overline{a}\}a_\gamma + \partial_{\{}\overline{a}\}a + \partial_{\{}\overline{a}\}\overline{a} && (P22)\\ &= a_\gamma\delta + \overline{a} = q && (P19, P20). \end{aligned}$$

b) Sei $p \equiv \partial_{\{a\}}(a_\gamma(a + \overline{a}))$. Mit $q \equiv a_\gamma a$ gilt $q \in \mathcal{P}_0^\delta$ und

$$\begin{aligned} p &= \partial_{\{}\overline{a}\}a_\gamma\partial_{\{}\overline{a}\}(a + \overline{a}) && (P22)\\ & a_\gamma(\partial_{\{}\overline{a}\}a + \partial_{\{}\overline{a}\}\overline{a}) && (P21)\\ &= a_\gamma(\delta + a) && (P19, P20)\\ &= a_\gamma a = q && (P16) \end{aligned}$$

Aufgabe 7-2 **Terminierung von Prozessen** (keine Abgabe)

Wir haben mehrere Möglichkeiten.

Möglichkeit 1: Ersetze ✓ durch ϵ. Dann haben wir die Regel $a \xrightarrow{a} \epsilon$, und ϵ kann keinen Transitionen ausführen. Dann erhalten wir aber $ab \xrightarrow{a} \epsilon b \xrightarrow{x}??$, der Prozess ϵb ist also stecken geblieben, da ϵ ja genau keine Transition ausführen kann.

Möglichkeit 2: Wir folgen dem Hinweis. Wir definieren ein Prädikat $\downarrow$ mit der Bedeutung $p\downarrow$ gdw. p kann ohne eine Aktion auszuführen, terminieren. Die Transitionsregeln müssen dann entsprechend angepasst werden, um das oben erwähnte Problem zu vermeiden.

Definition von $p\downarrow$: Wir lesen die Regel $\frac{A}{B}$ so, dass wenn A gilt ist, so ist auch B gültig.

$$\frac{}{\epsilon\downarrow} \quad \frac{p\downarrow \quad q\downarrow}{pq\downarrow} \quad \frac{p\downarrow}{p+q\downarrow} \quad \frac{q\downarrow}{p+q\downarrow} \quad \frac{p\downarrow \quad q\downarrow}{p \parallel q\downarrow} \quad \frac{p\downarrow \quad q\downarrow}{p \mathbin{\|\!\_} q\downarrow} \quad \frac{p\downarrow}{\partial_R(p)\downarrow}$$

Die operationelle Semantik muss nun entsprechend geändert werden, um der Terminierung Rechnung zu tragen, und das Problem mit dem Steckenbleiben (siehe Möglichkeit 1) zu vermeiden. Wir verwenden die folgenden Regeln:

$$\frac{}{a \xrightarrow{a} \epsilon} \quad \frac{p \xrightarrow{a} p'}{p+q \xrightarrow{a} p'} \quad \frac{q \xrightarrow{a} q'}{p+q \xrightarrow{a} q'} \quad \frac{p \xrightarrow{a} p'}{pq \xrightarrow{a} p'q} \quad \frac{p\downarrow \quad q \xrightarrow{a} q'}{pq \xrightarrow{a} q'}$$

$$\frac{p \xrightarrow{a} p'}{p \parallel q \xrightarrow{a} p' \parallel q} \quad \frac{q \xrightarrow{a} q'}{p \parallel q \xrightarrow{a} p \parallel q'} \quad \frac{p\downarrow \quad q \xrightarrow{a} q'}{p \parallel q \xrightarrow{a} q'} \quad \frac{q\downarrow \quad p \xrightarrow{a} p'}{p \parallel q \xrightarrow{a} p'} \quad \frac{p \xrightarrow{a} p'}{p \mathbin{\|\!\_} q \xrightarrow{a} p' \parallel q} \quad \frac{p\downarrow \quad q \xrightarrow{a} q'}{p \mathbin{\|\!\_} q \xrightarrow{a} q'}$$

In den nächsten drei Regeln seinen a, b kommunizierend, und $c \notin R$.

$$\frac{p \xrightarrow{a} p' \quad q \xrightarrow{b} q'}{p \parallel q \xrightarrow{\gamma(a,b)} p' \parallel q'} \quad \frac{p \xrightarrow{a} p' \quad q \xrightarrow{b} q'}{p \mid q \xrightarrow{\gamma(a,b)} p' \parallel q'} \quad \frac{p \xrightarrow{c} p'}{\partial_R(p) \xrightarrow{c} \partial_R(p')}$$

Mit diesen Regeln wird beispielsweise sichergestellt, das $ab \xrightarrow{a} b \xrightarrow{a} \epsilon$ eine gültige Kette von Reduktionen darstellt.

Aufgabe 7-3 **Bisimilarität und Restriktion II** (6 Punkte)

a) Sei $p \equiv \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a_\gamma(a+\overline{a}))$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} p &= \partial_{\{a,\overline{a}\}} a_\gamma \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a+\overline{a}) && (P22)\\ &= a_\gamma(\partial_{\{a,\overline{a}\}}(a) + \partial_{\{a,\overline{a}\}}(\overline{a})) && (P19, P21)\\ &= a_\gamma(\delta+\delta) && (P20)\\ &= a_\gamma\delta && (P16) \end{aligned}$$

Mit $q \equiv a_\gamma\delta$ gilt also $q = p$ und $q \in \mathcal{P}_0^\delta$.

b) Sei $p \equiv \partial_{\{a\}}((a_\gamma a) \parallel \overline{a})$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} p &= \partial_{\{a\}}(a_\gamma a \mathbin{\lfloor\!\lfloor} \overline{a} + \overline{a} \mathbin{\lfloor\!\lfloor} a_\gamma a + a_\gamma a \mid \overline{a}) && (P6c)\\ &= \partial_{\{a\}}(a_\gamma a \mathbin{\lfloor\!\lfloor} \overline{a}) + \partial_{\{a\}}(\overline{a} \mathbin{\lfloor\!\lfloor} a_\gamma a) + \partial_{\{a\}}(a_\gamma a \mid \overline{a}) && (P21)\\ &= \partial_{\{a\}} a_\gamma (a \parallel \overline{a}) + \partial_{\{a\}} \overline{a} a_\gamma a + \partial_{\{a\}}((a_\gamma a \mid \overline{a})a) && (P7.P8, P11)\\ &= a_\gamma \partial_{\{a\}}(a \parallel \overline{a}) + \overline{a} a_\gamma \partial_{\{a\}}(a) + \partial_{\{a\}}((a_\gamma a \mid \overline{a})a) && (P22, P19)\\ &= a_\gamma \partial_{\{a\}}(a \mathbin{\lfloor\!\lfloor} \overline{a} + \overline{a} \mathbin{\lfloor\!\lfloor} a + \overline{a} \mid a) + \overline{a} a_\gamma \delta + \partial_{\{a\}}(\delta a) && (P6_c, P20, P18)\\ &= a_\gamma \partial_{\{a\}}(a\overline{a} + \overline{a}a + a_\gamma) + a a_\gamma \delta + \overline{a} a_\gamma \delta + \partial_{\{a\}}\delta + \partial_{\{a\}} a && (P7, P10, P22)\\ &= a_\gamma(\partial_{\{a\}}(a\overline{a}) + \partial_{\{a\}}(\overline{a}a) + \partial_{\{a\}} a_\gamma) + a a_\gamma \delta + \delta\delta && (P21, P19, P20)\\ &= a_\gamma(\delta a + \overline{a}\delta + a_\gamma) + a a_\gamma \delta + \delta && (P22, P19, P20, P17)\\ &= a_\gamma(\delta + \overline{a}\delta + a_\gamma) + a a_\gamma \delta && (P17, P16)\\ &= a_\gamma(\overline{a}\delta + a_\gamma) + a a_\gamma \delta && (P16) \end{aligned}$$

Mit $q \equiv a_\gamma(\overline{a}\delta + a_\gamma) + a a_\gamma \delta$ gilt also $p = q$ und $q \in \mathcal{P}_0^\delta$.

c) Sei $p \equiv \partial_{\{a,\overline{a}\}}((a_\gamma a) \parallel \overline{a})$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} p &= \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a_\gamma a \mathbin{\lfloor\!\lfloor} \overline{a} + \overline{a} \mathbin{\lfloor\!\lfloor} a_\gamma a + a_\gamma a \mid \overline{a}) && (P6_c)\\ &= \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a_\gamma(a \parallel \overline{a}) + \overline{a} a_\gamma a + (a_\gamma \mid \overline{a})a) && (P8, P7, P11)\\ &= \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a_\gamma(a \mathbin{\lfloor\!\lfloor} \overline{a} + \overline{a} \mathbin{\lfloor\!\lfloor} a + a \mid \overline{a}) + \overline{a} a_\gamma a + \delta a) && (P6_c, P18)\\ &= \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a_\gamma(a\overline{a} + \overline{a}a + a_\gamma) + \overline{a} a_\gamma a + \delta) && (P7, P10, P17)\\ &= \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a_\gamma(a\overline{a} + \overline{a}a + a + \gamma) + \overline{a} a_\gamma a) && (P16)\\ &= \partial_{\{a,\overline{a}\}} a_\gamma(\partial_{\{a,\overline{a}\}}(a\overline{a}) + \partial_{\{a,\overline{a}\}}(\overline{a}a) + \partial_{\{a,\overline{a}\}}(a_\gamma)) + \partial_{\{a,\overline{a}\}}(\overline{a} a_\gamma \delta) && (P21, P22)\\ &= a_\gamma(\delta\delta + \delta\delta + a_\gamma) + \delta a_\gamma \delta && (P22, P19, P20)\\ &= a_\gamma a_\gamma && (P16, P17) \end{aligned}$$

Also leistet der Prozess $q \equiv a_\gamma a_\gamma$ das gewünschte.

Aufgabe 7-4 **Gleichheiten in Σ_{ACP}** (6 Punkte)

Nach Satz 3.3.3 und Satz 2.3.2. können wir, analog zur Vorlesung, annehmen, dass $p \in \mathcal{P}_0$ in Präfixform ist.

Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned}
p \parallel \delta &= p \mathbin{\|\!_} \delta + \delta \mathbin{\|\!_} p + p \mid \delta && (P6_c)\\
&= p \mathbin{\|\!_} \delta + \delta p + p \mid \delta && (P7)\\
&= p \mathbin{\|\!_} \delta + \delta + p \mid \delta && (P17)\\
&= p \mathbin{\|\!_} \delta + p \mid \delta && (P16)
\end{aligned}$$

Also ist zu zeigen: $p \mid \delta = p$. Dies zeigen wir durch Induktion nach dem Aufbau von p, wobei wir, wie oben begründet, annehmen können, dass $p \in \mathcal{P}_0$ in Präfixform ist. Mit der Definition der Präfixform erhalten wir folgenden induktiven Beweis.

Fall $p \equiv a$. $a \mid \delta = \delta$ nach (P18), da a, δ nicht kommunizierend.

Fall $p \equiv aq$. Die Induktionsvoraussetzung ist nun $q \mid \delta = \delta$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
aq \mid \delta &= (a \mid \delta)q && (P11)\\
&= \delta q && (P18)\\
&= \delta && (P17).
\end{aligned}$$

Fall $p = p_1 + p_2$. Hier können wir die Induktionsvoraussetzung $p_1 \mid \delta = \delta = p_2 \mid \delta$ verwenden. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
(p_1 + p_2) \mid \delta &= p_1 \mid \delta + p_2 \mid \delta && (P14)\\
&= \delta + \delta && (IV)\\
&= \delta && (P16)
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $p \mid \delta = \delta$. Insgesamt erhalten wir

$$p \parallel \delta = p \mathbin{\|\!\_} \delta + p \mid \delta = p \mathbin{\|\!\_} \delta + \delta = p \mathbin{\|\!\_} \delta,$$

also die erste Gleichheit.

Für die zweite Gleichheit $p \mathbin{\|\!\_} \delta = \delta$ verwenden wir wie oben Induktion über den Aufbau von p, wobei wir wieder annehmen dürfen, dass p in Präfixform ist.

Fall $p \equiv a$. Dann $p \mathbin{\|\!\_} \delta = a \mathbin{\|\!\_} \delta = p\delta$ nach (P7).

Fall $p \equiv aq$. Hier haben wir wieder die Induktionsvoraussetzung, dass $q \mathbin{\|\!\_} \delta = q\delta$, und berechnen:

$$\begin{aligned}
p \mathbin{\|\!_} \delta &= aq \mathbin{\|\!_} \delta\\
&= a(q \parallel \delta) && (P8)\\
&= a(q \mathbin{\|\!_} \delta) && \text{(erste Gleichheit)}\\
&= a(q\delta) && (IV)\\
&= (aq)\delta = p\delta && (P5)
\end{aligned}$$

Fall $p = p_1 + p_2$.Hier haben wir die Induktionsvoraussetzung $p_1 \mathbin{|\!|\!\_} \delta = p_1\delta$ und $p_2 \mathbin{|\!|\!\_} \delta = p_2\delta$, da p_1, p_2 früher bereits konstruiert wurden. Damit

$$\begin{aligned} p \mathbin{|\!|\!\_} \delta &= (p + 1 + p_2) \mathbin{|\!|\!\_} \delta \\ &= p_1 \mathbin{|\!|\!\_} \delta + p_2 \mathbin{|\!|\!\_} \delta && (P9) \\ &= p_1\delta + p_2\delta && (IV) \\ &= (p_1 + p_2)\delta = p\delta && (P4) \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Besprechung von 7-1, 7-2: 25.5.2005; **Abgabe und Besprechung 7-3, 7-4**: 1.6.2005.