Ludwig-Maximilians-Universität München SS 2005
Institut für Informatik Lösungsvorschlag 9
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

Prozessalgebra

Aufgabe 9-1 **Bewachte Spezifikationen I** (keine Abgabe)

a) Wir setzen $t_1 \equiv ay \parallel yx$ und $t_2 \equiv \delta y + (a+b)x$. Wir müssen s_1, s_2 in Präfixform finden, so dass $\Sigma_{\mathrm{ACPR}}, x = t_1, y = t_2 \vdash t_i = s_i$ für $i = 1, 2$.

Für t_2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta y + (a+b)x &= \delta + (a+b)x && (P17) \\ &= (a+b)x && (P16) \\ &= ax + bx && (P4) \end{aligned}$$

d.h. mit $s_2 = ax + bx$ ist die Behauptung für t_2 gezeigt.

Für t_1 gilt

$$\begin{aligned} ay \parallel yx &= ay \mathbin{⌊\!⌊} yx + yx \mathbin{⌊\!⌊} ay + ay \mid yx && (P6c) \\ &= a(y \parallel yx) + (ax+bx)x \mathbin{⌊\!⌊} ay + ay \mid (ax+bx)x && (P8, y = t_2 = s_2) \\ &= a(y \parallel yx) + (axx+bxx) \mathbin{⌊\!⌊} ay + ay \mid (axx+bxx) && (P4) \\ &= a(y \parallel yx) + axx \mathbin{⌊\!⌊} ay + bxx \mathbin{⌊\!⌊} ay + ay \mid axx + ay \mid bxx && (P9, P15) \\ &= a(y \parallel yx) + a(xx \parallel ay) + b(xx \parallel ay) + (a \mid a)(y \parallel xx) + (a \mid b)(y \parallel xx) && (P8, P13) \\ &= a(y \parallel yx) + a(xx \parallel ay) + b(xx \parallel ay) + \delta(y \parallel xx) + \delta(y \parallel xx) && (P18) \\ &= a(y \parallel yx) + a(xx \parallel ay) + b(xx \parallel ay) + \delta + \delta && (P17) \\ &= a(y \parallel yx) + a(xx \parallel ay) + b(xx \parallel ay) && (P16) \end{aligned}$$

Der Term $s_2 = a(y \parallel yx) + a(xx \parallel ay) + b(xx \parallel ay)$ ist in Präfixform, und die Behauptung ist gezeigt.

b) Setze $R = \{a, \bar{a}\}$, $t_1 = \partial_R(y \mathbin{⌊\!⌊} x)$ und $t_2 \equiv ax \parallel \bar{a}y$. Wir zeigen wie oben, dass es s_1 und s_2 in Präfixform gibt mit $\Sigma_{\mathrm{ACPR}}, x = t_1, y = t_2 \vdash t_i = s_i$ für $i = 1, 2$.

Für t_2 erhalten wir

$$\begin{aligned} ax \parallel \bar{a}y &= ax \mathbin{⌊\!⌊} \bar{a}y + \bar{a}y \mathbin{⌊\!⌊} ax + ax \mid \bar{a}y && (P6_c) \\ &= a(x \parallel \bar{a}y) + \bar{a}(y \parallel ax) + (a \mid \bar{a})(x \parallel y) && (P8, P13) \\ &= a(x \parallel \bar{a}y) + \bar{a}(y \parallel ax) + a_\gamma(x \parallel y) && (P10) \end{aligned}$$

und $s_2 \equiv a(x \parallel \bar{a}y) + \bar{a}(y \parallel ax) + a_\gamma(x \parallel y)$ ist in Präfixform.

Für t_1 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\partial_R(y \,⌊\!⌊\, x) &= \partial_R((a(x \parallel \bar{a}y) + \bar{a}(y \parallel ax) + a_\gamma(x \parallel y) && (y = t_2 = s_2)\\
&= \partial_R(a(x \parallel \bar{a}y) \,⌊\!⌊\, x + \bar{a}(y \parallel ax) \,⌊\!⌊\, x + a_\gamma(x \parallel y) \,⌊\!⌊\, x) && (P9)\\
&= \partial_R(a(x \parallel ay \parallel x) + \bar{a}(y \parallel ax \parallel x) + a_\gamma(x \parallel y \parallel x)) && (P8)\\
&= \partial_R(a(x \parallel ay \parallel x)) + \partial_R(\bar{a}(y \parallel ax \parallel x)) + \partial_R(a_\gamma(x \parallel y \parallel x)) && (P21)\\
&= \partial_R(a)\partial_R(a(x \parallel ay \parallel x)) + \partial_R(\bar{a}) + \partial_R(y \parallel ax \parallel x)) + \partial_R(a_\gamma)\partial_R(x \parallel y \parallel x)) && (P22)\\
&= \delta\partial_R(a(x \parallel ay \parallel x)) + \delta + \partial_R(y \parallel ax \parallel x)) + a_\gamma\partial_R(x \parallel y \parallel x)) && (P19, P20)\\
&= \delta + \delta + a_\gamma\partial_R(x \parallel y \parallel x) && (P17)\\
&= a_\gamma(x \parallel y \parallel x)
\end{aligned}
$$

und $s_1 = a_\gamma(x \parallel y \parallel x)$ ist in Präfixform wie gewünscht.

Aufgabe 9-2 **Bewachte Spezifikationen II**

a) Wir zeigen, dass $(\langle x\rangle, \langle x\rangle)$ nicht bewacht ist durch einen Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, dass $(\langle x\rangle, \langle x\rangle)$ bewacht ist. Dann gibt es t in Präfixform mit $\Sigma_{\text{ACPR}}, x = x \vdash x = t$. Also gilt für $a \neq b \in \mathcal{A}$:

$$\Sigma_{\text{ACPR}} \vdash t^{[x/a]} = a \text{ und } \Sigma_{\text{ACPR}} \vdash t^{[x/b]} = b$$

Da t in Präfixform, können wir annehmen, dass t von der Form $t = \sum_{i\in I} t_i$ ist, für eine endliche Indexmenge I und $t_i \equiv a_i$ mit $a_i \neq \delta$ oder $t_i \equiv b_i s_i$ für alle $i \in I$. Da $a \xrightarrow{a} \checkmark$, $b \xrightarrow{a} \checkmark$ und $t^{[x/a]} = a$ bzw. $t^{[x/b]} = b$ gilt

$$t^{[x/a]} \xrightarrow{a} \checkmark \text{ und } t^{[x/b]} \xrightarrow{b} \checkmark.$$

Also gibt es $i, j \in I$ mit $t_i \equiv a$ und $t_j \equiv b$. Damit gilt $t^{[x/a]} \xrightarrow{b} \checkmark$, im Widerspruch zu $t^{[x/a]} \equiv a$.

b) Der Beweis für die nicht-Bewachtheit von $(\langle x\rangle, \langle x + a\rangle)$ ist ähnlich. Wenn wir annehmen, das $(\langle x\rangle, \langle x + a\rangle)$ bewacht ist, haben wir t in Präfixform mit $\Sigma_{\text{ACPR}}, x = x + a \vdash t = x + a$. Für $a \neq b \in \mathcal{A}$ haben wir dann

$$t^{[x/a]} = a + a = a + a \text{ und } t^{[x/b+a]} = (b + a) + a = b + a$$

Da t in Präfixform ist, können wir annehmen, dass $t = \sum_{i\in I} t_i$, wobei I endlich und $t_i = a_i \neq \delta$ oder $t_i = b_i s_i$ für alle $i \in I$. Wie oben schiessen wir, dass es $i, j \in I$ gibt mit $t_i \equiv a$ und $t_j \equiv b$. Dann gilt aber

$$a \equiv t^{[x/a]} = \sum_{k\neq j} t_k + b \xrightarrow{b} \checkmark$$

also $a \xrightarrow{b} \checkmark$, Widerspruch.

Aufgabe 9-3 **Bewachte Spezifikationen III** (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende rekursiven Spezifikationen bewacht sind:

a) $(\langle x\rangle, \langle x \,⌊\!⌊\, a\rangle)$ ist nicht bewacht: Die Substitution von $x \,⌊\!⌊\, a$ für x kann $x \,⌊\!⌊\, a$ nie in Präfixform bringen.

b) $(\langle x\rangle, \langle b(x \parallel a) \parallel x\rangle)$ ist nicht bewacht; Begründung wie oben.

c) $(\langle x, y, z\rangle, \langle y + az, z + bx, x + cy\rangle)$ ist nicht bewacht: bei jeder möglichen Substitution bleibt eine Variable übrig, vor der keine atomare Aktion steht.

d) $(\langle x, y, z\rangle, \langle y+az, bx, x+cy\rangle)$ ist bewacht. Sei $t_1 \equiv y+z$, $t_2 \equiv bx$ und $t_3 \equiv x+cy$. Wir zeigen, dass es s_1, s_2, s_3 in Präfixform gibt mit $\Sigma_{\text{ACPR}}, x = t_1, y = t_2, z = t_3 \vdash t_i = s_i$ für $i = 1, 2, 3$.

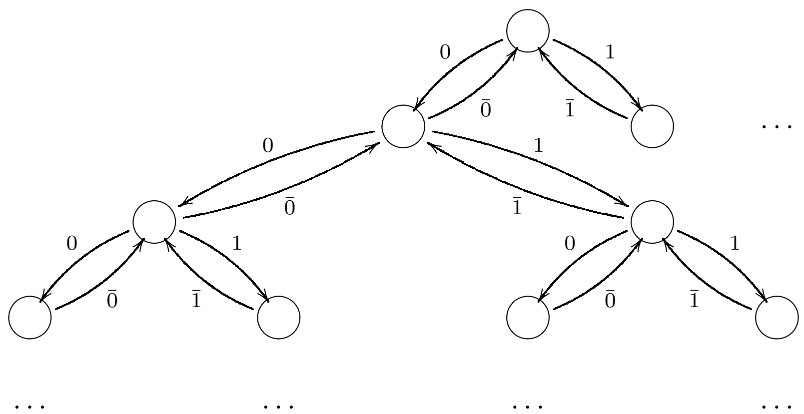
Für t_2 erhalten wir sofort, dass $s_2 = t_2 = bx$ bereits in Präfixform ist.

Für t_1 berechnen wir $y + az = bx + az$, da $y = bx$, und mit $s_1 \equiv bx + az$ ist die Bewachtheit bewiesen.

Für t_3 erhalten wir schiesslich durch einsetzen der Gleichheiten für t_1 und t_2, dass $x + cy = y + az + cy = bx + az + cy$. Mit $s_3 \equiv bx + az + cy$ ist die Behauptung also auch für t_3 gezeigt.

Aufgabe 9-4 **Reursive Spezifikation eines Kellers** (8 Punkte)

Hier ist es wesentlich, dass wir uns üeberlegen, ob der Keller nur unendliche, oder auch endliche Aktionsfolgen durchführen können soll. Wir entscheiden uns für das erstere, da es immer möglich sein soll, ein Element auf dem Keller abzulegen. Informell soll der Keller also die folgenden Aktionsfolgen ausführen können:



wobei wir 0 für $push(0)$ und $\bar{0}$ für $pop(0)$ geschrieben haben; analog für 1 und $\bar{1}$.

Die Idee ist nun die Folgende. Wir definieren einen leeren Keller A, einen Keller A_1, dessen oberstes element eine 1 ist, sowie einen Keller A_0, bei dem die 0 oben liegt. Diese drei Keller müssen dann den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} A &= (push(0)A_0 + push(1)A_1)A \\ A_0 &= pop(0) + push(0)A_0A_0 + push(1)A_1A_0 \\ A_1 &= pop(1) + push(0)A_0A_1 + push(1)A_1A_1 \end{aligned}$$

Formal erhalten wir dann folgenden Prozessterm (durch übersetzen der Gleichungen)

$$A = \mu_x x, x_0, x_1(t, t_0, t_1)$$

wobei $t = (push(0)x_0 + push(1)x_1)x$, $t_0 \equiv pop(0) + push(0)x_0x_0 + push(1)x_1x_0$ und $t_1 \equiv pop(1) + push(0)x_0x_1 + push(1)x_1x_1$, der den Keller wie verlangt modelliert.