Übungen zu Informatik I

Aufgabe 13-1 **Quicksort** (keine Abgabe)

Mit folgendem Algorithmus *Quicksort* kann eine Liste l ganzer Zahlen sortiert werden:

(1) Wenn l leer ist oder genau ein Element enthält, so ist l bereits sortiert und der Algorithmus wird mit Ergebnis l beendet.

(2) Andernfalls wird l nach folgendem Schema in zwei Listen aufgeteilt: l_1 enthält alle Elemente aus $tl(l)$ die kleiner oder gleich $hd(l)$ sind, l_2 enthält alle Elemente aus $tl(l)$, die größer als $hd(l)$ sind.

(3) l_1 und l_2 werden durch Anwendung von *Quicksort* sortiert; die Ergebnisse seien l'_1 und l'_2.

(4) Das Ergebnis ist die Konkatenation von l'_1, $hd(l)$ und l'_2 (in dieser Reihenfolge).

a) Geben Sie ein SML-Programm *quicksort* an, das den Algorithmus *Quicksort* implementiert.

b) Zeigen Sie: *quicksort* terminiert für jede Eingabe l.

c) Zeigen Sie: Das Ergebnis von *quicksort* ist aufsteigend sortiert.

d) Welche asymptotische Komplexität hat *quicksort* (in Abhängigkeit von der Länge von l), falls die Eingabe bereits sortiert ist?

e) Welche asymptotische Komplexität hat *quicksort*, falls in jedem rekursiven Aufruf die Listen l_1 und l_2 die gleiche Länge haben?

Aufgabe 13-2 **Folgen als cpos** (keine Abgabe)

Sei A eine Menge. Mit A^* (bzw. A^∞) bezeichnen wir die Menge der endlichen (bzw. endlichen und unendlichen) Folgen von Elementen aus A. Für eine endliche Folge $a = (a_0, \dots, a_{k-1})$ schreiben wir auch $(a_n)_{n<k}$; wir setzen dann $\lg(a) = k$. Genauso bezeichen wir die unendliche Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $(a_n)_{n<\infty}$ und setzen $\lg(a) = \infty$.

Eine Folge $a = (a_n)_{n<k}$ ist ein Präfix einer Folge $b = (b_n)_{n<l}$ wenn $k \le l$ und $a_i = b_i$ für alle $0 \le i < k$, wobei $k, l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$; dies notieren wir durch $a \sqsubseteq b$. Zeigen Sie:

a) $(A^*, \sqsubseteq)$ und $(A^\infty, \sqsubseteq)$ sind partielle Ordnungen.

b) A^* ist nicht vollständig, A^∞ hingegen schon.

c) Für beliebiges $x \in A$ ist die Funktion $p_x : A^\infty \to A^\infty$, definiert durch $(a_n)_{n<k} \mapsto (b_n)_{n<k+1}$, wobei $b_0 = x$ und $b_n = a_{n-1}$ für $0 < n < k+1$, stetig.

d) Die Funktion $d : \mathbb{N}_0^\infty \to \mathbb{N}_0^\infty$, definiert durch $(a_n)_{n<k} \mapsto (2 \cdot a_n)_{n<k}$, ist stetig.

e) Die Funktion $f : \mathbb{N}_0^\infty \to \mathbb{N}_0^\infty$, definiert durch $(a_n)_{n<k} \mapsto (b_n)_{n<k+1}$ wobei $b_0 = 1$ und $b_n = 2 \cdot a_{n-1}$ für $0 < n < k+1$, ist stetig.

f) Für den kleinsten Fixpunkt $(a_n)_{n<k}$ von f gilt $k = \infty$ und $a_n = 2^n$ für alle $n < \infty$.

Aufgabe 13-3 **Permutationen** (3 Punkte)

Eine Liste $m = [m_1, \dots, m_n]$ heißt eine *Permutation* einer Liste $l = [l_1, \dots l_n]$, wenn es eine Bijektion $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ gibt, so daß $m_{\pi(i)} = l_i$ für alle $1 \le i \le n$. Das folgende SML-Programm überprüft, ob m eine Permutation von l ist:

```
fun member x nil = false
  | member x (y::ys) = x = y orelse member x ys
exception not_found
fun remove x nil = raise not_found
  | remove x (y::ys) = if x = y then ys else y::(remove x ys)
fun perm l m =
    if null l then null m
    else if member (hd l) m then perm (tl l) (remove (hd l) m)
    else false
```

a) Welche asymptotische Komplexität hat die Funktion *perm*? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie eine SML-Funktion *perm2* : **int list** $\rightarrow$ **int list** $\rightarrow$ **bool** an, die das gleiche leistet wie *perm*, jedoch eine geringere asymptotische Komplexität hat.

Aufgabe 13-4 **Kleinstes gemeinsames Vielfaches** (3 Punkte)

Das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen m und n ist die kleinste positive natürliche Zahl, die sowohl durch m als auch durch n teilbar ist. Das folgende SML-Programm berechnet das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n:

```
fun kgv(m,n) = let fun loop i =
  if (i mod m) = 0 andalso (i mod n) = 0 then i else loop(i+1)
in loop m end
```

In den folgenden Teilaufgaben können Sie davon ausgehen, dass Sie eine SML-Implementierung verwenden, die (im Gegensatz zum in der Vorlesung betrachteten Berechnungsmodell) arithmetische Ausdrücke mit beliebig großen natürlichen Zahlen (nur) mit folgender Komplexität berechnen kann:

$$m + n = O(\log m + \log n) \qquad m \cdot n = O((\log m)(\log n))$$
$$m \operatorname{div} n = O((\log m)(\log n)) \qquad m \bmod n = O((\log m)(\log n))$$

a) Zeigen Sie: *kgv* terminiert für alle $m, n \geq 1$.

b) Welche asymptotische Komplexität hat *kgv* in Abhängigkeit von m und n im schlechtesten Falle ? Begründen Sie Ihre Antwort. *Hinweis:* Betrachten Sie die Anzahl der benötigten Rechenschritte für voneinander verschiedene Primzahlen m, n.

c) Geben Sie ein SML-Programm *kgv2* : **int** $*$ **int** $\rightarrow$ **int** an, das das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen mit geringerer asymptotischer Komplexität berechnet als *kgv*.
Hinweis: Mit dem *Euklidischen Algorithmus* in geeigneter Fassung können Sie den *größten gemeinsamen Teiler* zweier Zahlen m, n mit asymptotischer Komplexität $\log(m)\log(n)$ berechnen.

d) *(Keine Abgabe)* Verwenden Sie die Programme *kgv* und *kgv2* um das kleinste gemeinsame Vielfache von 12345 und 123456 zu bestimmen. Wie groß ist der Zeitunterschied für die beiden Programmabläufe?

Aufgabe 13-5 **Fibonacci-Zahlen als Fixpunkt** (6×1 Punkt)

Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ cpos. Zeigen Sie:

a) $(D \times E, \sqsubseteq_{D\times E})$ ist eine cpo, wobei $(d_1, e_1) \sqsubseteq_{D\times E} (d_2, e_2)$ genau dann gilt, wenn $d_1 \sqsubseteq_D d_2$ und $e_1 \sqsubseteq_E e_2$.

b) Die Projektionen $\pi_1 : D \times E \rightarrow D$ und $\pi_2 : D \times E \rightarrow E$, definiert durch $\pi_1(d, e) = d$ und $\pi_2(d, e) = e$, sind stetig.

c) Ist F eine weitere cpo und sind $f : F \rightarrow D$ und $g : F \rightarrow E$ stetig, so ist auch $\langle f, g\rangle : F \rightarrow D \times E$, definiert durch $\langle f, g\rangle(x) = (f(x), g(x))$, stetig.

d) Die Funktion $\oplus : \mathbb{N}_0^\infty \times \mathbb{N}_0^\infty \rightarrow \mathbb{N}_0^\infty$, gegeben durch $(a_n)_{n<k_1} \oplus (b_n)_{n<k_2} = (c_n)_{n<k}$ mit $k = \min\{k_1, k_2\}$ und $c_n = a_n + b_n$ für alle $0 \leq n < k$, ist stetig.

e) Die Funktion $f : (\mathbb{N}_0^\infty)^3 \rightarrow (\mathbb{N}_0^\infty)^3$, definiert durch $f(x, y, z) = (p_1(y), p_1(z), x \oplus y)$, ist stetig.

f) Für den kleinsten Fixpunkt (x, y, z) von f gilt: x ist die Folge der Fibonacci-Zahlen, d.h. $x = (\mathrm{fib}(0), \mathrm{fib}(1), \mathrm{fib}(2), \ldots)$.

Benutzen Sie bitte folgende Zeichenkombinationen bei der Abgabe: `<=` für $\sqsubseteq$, `N` für $\mathbb{N}_0$, `+` für $\oplus$ und `pi` für π.

> Bitte beachten Sie, dass wir Ihre Lösung nur dann korrigieren und bewerten können, wenn sie als *Textdatei* abgegeben wird. Als Lösung ist ein *lauffähiges* SML-Programm abzugeben. Nicht zur Lösung gehörende Bemerkungen sind zwischen die Kommentarzeichen ($*$ und $*$) einzuschließen.
>
> Alle hiervon abweichenden Hausaufgaben werden mit 0 Punkten bewertet.

Abgabe: Dienstag, 28.1.2003, 12:00 Uhr.