

## Übungen zu Informatik I (Lösungsvorschlag)

### Aufgabe 3-1 Ermäßigung im Kino (keine Abgabe)

- a) Es wird eine Ermäßigung eingeräumt, wenn der Ausdruck

$$\text{schwerbehindert} \vee (\text{monat} = 11) \vee \\ (\text{student} \wedge \text{alter} \leq 27) \vee (\text{azubi} \wedge \text{alter} < 23)$$

den Wert *true* ergibt.

- b) Beachten Sie, dass in der Aufgabenstellung nicht genau gesagt wurde, wie mit Personen zu verfahren ist, die z.B. sowohl Student als auch schwerbehindert sind. Wir lösen diese Unterspezifikation dadurch, dass wir den höchstmöglichen Rabatt annehmen (möglich wäre z.B. auch die Summe der Rabatte).

Wir bestimmen zunächst den Rabatt ohne Berücksichtigung des Geburtsmonats:

```
rabatt1 = function (alter: nat, student: bool, azubi: bool,
  schwerbehindert: bool) nat :
```

```
  result Rabatt ohne Beruecksichtigung des Geburtstags
  if (schwerbehindert) then 50
  else if student & alter <= 27 then 30
  else if azubi & alter < 23 then 30
  else 0
```

Um den Geburtstag zu berücksichtigen, definieren wir zunächst eine Funktion, die zwar den Geburtstag, nicht aber die Ober- und Untergrenze berücksichtigt.

```
rabatt2 = function (alter: nat, student: bool, azubi: bool,
  schwerbehindert: bool, monat: nat) nat :
```

```
  result Rabatt ohne Beruecksichtigung der Ober- und Untergrenzen
  (if (monat = 11) then 2 else 1) * rabatt1(alter, student, azubi, schwerbehindert)
```

Mit Berücksichtigung der Ober- und Untergrenze erhalten wir also

```
rabatt3 = function (alter: nat, student: bool, azubi: bool,
  schwerbehindert: bool, monat: nat) nat :
```

```
  result Rabatt, wie von der Aufgabe gefordert.
  if rabatt2 (alter, student, azubi, schwerbehindert, monat) > 70
  then 70
  else if rabatt2 (alter, student, azubi, schwerbehindert, monat) < 20
    & monat = 11
  then 20
  else (rabatt2 (alter, student, azubi, schwerbehindert, monat))
```

Diese Lösung definiert die gesuchte Funktion, indem sie sich auf Funktionen, die ein Teilproblem lösen, abstützt.

Eine alternative Lösung erhalten wir, wenn wir alle drei Definitionen mit Hilfe von lokalen Konstanten zusammenfassen:

```

rabatt = function (alter: nat, student: bool, azubi: bool,
  schwerbehindert: bool, monat: nat) nat :

```

```

result Rabatt, wie von der Aufgabe gefordert

```

```

let r1 =
  if (schwerbehindert) then 50
  else if student ∧ alter ≤ 27 then 30
  else if azubi ∧ alter < 23 then 30
  else 0
in
  let r2 =
    (if monat = 11 then 2 else 1) * r1
  in
    if r2 > 70 then 70
    else if r2 < 20 ∧ monat = 11 then 20
    else r2
  end
end

```

### Aufgabe 3-2 Konkatenation (keine Abgabe)

Die Behauptung kann man durch Induktion über den Aufbau von  $\alpha$  wie folgt beweisen:

Induktionsanfang:  $l(\varepsilon @ \beta) = l(\beta)$  (Def. von @)  
 $= 0 + l(\beta)$   
 $= l(\varepsilon) + l(\beta)$  (Def. von  $l$ )

Induktionsschluss:  $l((a :: \alpha) @ \beta) = l(a :: (\alpha @ \beta))$  (Def. von @)  
 $= 1 + l(\alpha @ \beta)$  (Def. von  $l$ )  
 $= 1 + l(\alpha) + l(\beta)$  (Induktionsvoraussetzung)  
 $= l(a :: \alpha) + l(\beta)$  (Def. von  $l$ )

### Aufgabe 3-3 Induktion (keine Abgabe)

Um  $N = R$  zu beweisen, zeigen wir

1.  $N \subseteq R$
2.  $R \subseteq N$

Beweis von 1.: Dies beweist man durch Induktion entlang der induktiven Definition von  $N$ . (Man beweist also die folgende Aussage: für alle  $(m, n) \in N : (m, n) \in R$ .)

Induktionsanfang: Offenbar gilt  $(0, 0) \in R$  und  $(1, 1) \in R$

Induktionsschluss: Sei  $(m, n) \in N$  erzeugt durch eine der beiden in der induktiven Definition von  $N$  angegebenen Regeln.

Fall 1:  $(m, n) = (m' + 2, n)$  für ein  $(m', n) \in N$ . Nach IV. gilt  $(m', n) \in R$ , d. h.  $m' + n$  ist gerade. Folglich ist  $m' + 2 + n$  auch gerade und damit gilt  $(m, n) \in R$ .

Fall 2:  $(m, n) = (m, n' + 2)$  für ein  $(m, n') \in N$ . Die Behauptung folgt wie in Fall 1.

Beweis von 2. Es ist folgendes zu zeigen: für alle  $(m, n) \in R$  gilt  $(m, n) \in N$ .

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann gibt es ein  $(m, n) \in R$  mit  $(m, n) \notin N$ . Wenn es ein solches  $(m, n)$  gibt, dann gibt es auch eins, so dass  $m + n$  minimal ist, d. h. für alle anderen  $(m', n') \in R \setminus N$  gilt  $m' + n' \geq m + n$ . (\*)

Da  $(m, n) \in R$ , ist  $m + n$  gerade, aber weder 0 noch 2, da alle Paare  $(m', n')$  mit  $(m' + n') \in \{0, 2\}$  (diese sind:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$  und  $(0, 2)$ ) sind in  $N$ . Folglich muss  $m + n \geq 4$  gelten. Dann ist aber entweder  $m$  oder  $n$  (oder auch beide) mindestens zwei.

Fall 1.:  $m \geq 2$ . Dann ist  $m - 2$  auch eine natürliche Zahl und mit  $m + n$  auch  $(m - 2) + n$  gerade, also liegt auch  $((m - 2), n)$  in  $R$ . Andererseits kann sie nicht in  $N$  liegen, da sonst nach der Definition von  $N$  auch  $((m - 2) + 2, n) = (m, n)$  ein Element von  $N$  sein müsste. Also gilt  $((m - 2), n) \in R \setminus N$ . Da  $(m - 2) + n < m + n$  ist, ist dies ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $m + n$  minimal ist (vgl. (\*)).

Fall 2.:  $n \geq 2$ . ähnlich wie in Fall 1 kann man aus der Annahme folgern, dass mit  $(m, n)$  auch  $(m, n - 2)$  in  $R \setminus N$  liegt. Daraus erhält man, wie in Fall 1, einen Widerspruch.

Alternativ kann man die zweite Inklusion auch durch vollständige Induktion nach  $m + n$  beweisen.

Induktionsanfang: Ist  $m + n = 0$ , so ist  $(m, n) = (0, 0) \in N$  und offenbar gilt  $(0, 0)$ . Für  $(m, n) \in R$  ist  $m + n = 1$  nicht möglich. Für  $m + n = 2$  gibt es drei Möglichkeiten:  $(m, n) = (0, 2)$ ,  $(m, n) = (1, 1)$  und  $(m, n) = (2, 0)$ . In allen drei Fällen gilt offenbar  $(m, n) \in N$ .

Induktionsschluss: Sei  $(m, n) \in R$  mit  $m + n > 2$ . Es ist zu zeigen, dass  $(m, n) \in N$  gilt, wobei man für alle  $(m', n') \in R$  mit  $m' + n' < m + n$  annehmen darf, dass  $(m', n') \in N$  gilt.

Es gibt nun zwei Fälle:

Fall 1:  $m \geq 2$ . Dann ist  $m - 2$  wieder eine natürliche Zahl und da mit  $m + n$  auch  $(m - 2) + n$  gerade ist, gilt  $(m - 2, n) \in R$ . Da  $(m - 2) + n < m + n$  ist, folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass  $(m - 2, n) \in N$  gilt. Nach der Definition von  $N$  gilt damit  $(m, n) \in N$ .

Fall 2:  $m < 2$ . Dann ist  $n \geq 2$  wegen  $m + n > 2$ . Daraus folgt wie in Fall 1 die Behauptung.

### Aufgabe 3-4

### Klassifizierung von Warmblütern

(1 + 2 Punkte)

- a) Es handelt sich um ein Kloakentier (der bekannteste Vertreter ist übrigens das Schnabeltier), wenn der folgende boolesche Ausdruck *true* ergibt:

$$\text{kloakentier} = (\neg \text{plazenta}) \wedge (\neg \text{beutel}) \wedge \text{haarkleid}$$

- b) Wir verwenden ein einfaches, kaskadiertes **if**.

```

function klassifikation (eier : bool, haarkleid, plazenta : bool,
  beutel : bool, haarkleid : bool) nat :

  result 0 fuer Voegel, 1 fuer Plazentatiere, 2 fuer Beuteltiere und 3 fuer Kloakentiere
  if eier  $\wedge$  ( $\neg$  haarkleid)
  then 0
  else if plazenta
    then 1
    else if beutel
      then 2
      else 3

```

### Aufgabe 3-5

### Endliche Folgen

(3 + 4 Punkte)

a) Die Funktion *sum* lässt sich rekursiv wie folgt definieren:

```

sum( $\varepsilon$ ) := 0
sum( $a :: \alpha$ ) :=  $a + \text{sum}(\alpha)$ 

```

Die Behauptung  $\text{sum}(\alpha @ \beta) = \text{sum}(\alpha) + \text{sum}(\beta)$  kann man durch Induktion nach  $\alpha$  beweisen:

Induktionsanfang:  $\text{sum}(\varepsilon @ \beta) = \text{sum}(\beta)$  (Def. von @)  
 $= 0 + \text{sum}(\beta)$   
 $= \text{sum}(\varepsilon) + \text{sum}(\beta)$  (Def. von *sum*)

Induktionsschluss:  $\text{sum}((a :: \alpha) @ \beta) = \text{sum}(a :: (\alpha @ \beta))$  (Def. von @)  
 $= a + \text{sum}(\alpha @ \beta)$  (Def. von *sum*)  
 $= a + \text{sum}(\alpha) + \text{sum}(\beta)$  (IV.)  
 $= \text{sum}(a :: \alpha) + \text{sum}(\beta)$  (Def. von *sum*)

b) Die Funktion *filter-pos* kann man rekursiv wie folgt definieren:

```

filter-pos( $\varepsilon$ ) :=  $\varepsilon$ 
filter-pos( $a :: \alpha$ ) :=  $\begin{cases} \text{filter-pos}(\alpha) & \text{falls } a \leq 0 \\ a :: \text{filter-pos}(\alpha) & \text{sonst} \end{cases}$ 

```

Beweis von  $\text{filter-pos}(\text{filter-pos}(\alpha)) = \text{filter-pos}(\alpha)$  durch Induktion über  $\alpha$ :

Induktionsanfang:  $\text{filter-pos}(\text{filter-pos}(\varepsilon)) = \text{filter-pos}(\varepsilon)$  (nach der Def. von *filter-pos*)

Induktionsschluss:

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1:  $a \leq 0$ . Dann gilt:

$\text{filter-pos}(\text{filter-pos}(a :: \alpha')) = \text{filter-pos}(\text{filter-pos}(\alpha'))$  (Def. von *filter-pos*)  
 $= \text{filter-pos}(\alpha')$  (nach IV.)  
 $= \text{filter-pos}(a :: \alpha')$  (nach Def. von *filter-pos*)

Fall 2:  $a > 0$ . Dann gilt:

$\text{filter-pos}(\text{filter-pos}(a :: \alpha')) = \text{filter-pos}(a :: \text{filter-pos}(\alpha'))$  (Def. von *filter-pos*)  
 $= a :: \text{filter-pos}(\text{filter-pos}(\alpha'))$  (Def. von *filter-pos*)  
 $= a :: \text{filter-pos}(\alpha')$  (nach IV.)  
 $= \text{filter-pos}(a :: \alpha')$  (Def. von *filter-pos*)

Da in beiden Fällen  $\text{filter-pos}(\text{filter-pos}(a :: \alpha')) = \text{filter-pos}(a :: \alpha')$  gilt, folgt die Behauptung.

**Aufgabe 3-6****Boolesche Gesetze**

(2 Punkte)

Wir verwenden die Wahrheitstafel aus der Vorlesung.

a) Zeige:  $x \wedge \text{true} = x$ .

Für  $x = \text{true}$ :  $x \wedge \text{true} = \text{true} \wedge \text{true} = \text{true} = x$ .

Für  $x = \text{false}$ :  $x \wedge \text{true} = \text{false} \wedge \text{true} = \text{false} = x$ .

b) Zeige:  $x \vee \text{false} = x$ :

Für  $x = \text{true}$ :  $x \vee \text{false} = \text{true} \vee \text{false} = \text{true} = x$ .

Für  $x = \text{false}$ :  $x \vee \text{false} = \text{false} \vee \text{false} = \text{false} = x$ .

c) Zeige:  $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ .

Für  $x = \text{true}$ ;  $\neg(x \wedge y) = \neg y = \text{false} \vee \neg y = \neg x \vee \neg y$ .

Für  $x = \text{false}$ :  $\neg(x \wedge y) = \neg \text{false} = \text{true} = \text{true} \vee \neg y = \neg x \vee \neg y$ .