Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kröger, Dr. D. Pattinson

WS 2003/2004
Lösungsvorschlag 1

Temporale Logik und Zustandssysteme

Aufgabe 1-1 **Finden Sie den Mörder** (keine Abgabe)

a) Diese Aufgabe ist ein Standardproblem für automatische Beweissysteme. Ein Hauptproblem ist die Codierung in einer geeigneten (aussagen- oder prädikaten-) logischen Sprache.

Sei $P = \{a, b, c\}$ (man denke an Agathe, Butler, Charles). Wir definieren die Menge

$$\mathcal{V} = \{kill_{xy}, hate_{xy}, richer_{xy} \mid x, y \in P\}$$

von Aussagevariablen. Die Interpretation ist ziemlich offensichtlich, z.B. steht $hate_{ac}$ für die Aussage "Agathe hasste Charles". Damit übersetzen wir die gegebenen Aussagen in die folgende Menge $\mathcal{F}$ von Formeln:

1. Im Haus lebten nur Agathe, ihr Butler und Onkel Charles.
   wird nicht explizit übersetzt, sondern ist Grundannahme bei der folgenden Codierung
2. Agathe wurde von einem Hausbewohner getötet.
   $$kill_{aa} \vee kill_{ba} \vee kill_{ca}$$
3. Wer immer jemanden tötet, hasst sein Opfer.
   $$kill_{xy} \rightarrow hate_{xy} \qquad \text{für alle } x, y \in P$$
4. Der Täter ist niemals reicher als das Opfer.
   $$kill_{xy} \rightarrow \neg richer_{xy} \qquad \text{für alle } x, y \in P$$
5. Charles hasst niemanden, den Agathe hasste.
   $$hate_{ax} \rightarrow \neg hate_{cx} \qquad \text{für alle } x \in P$$
6. Agathe hasste alle außer vielleicht den Butler.
   $$hate_{aa} \wedge hate_{ac}$$
7. Der Butler hasst alle, die nicht reicher als Agathe sind oder die Agathe hasste.
   $$(\neg richer_{xa} \vee hate_{ax}) \rightarrow hate_{bx} \qquad \text{für alle } x \in P$$
8. Kein Hausbewohner hasst(e) alle Hausbewohner.
   $$\neg hate_{xa} \vee \neg hate_{xb} \vee \neg hate_{xc} \qquad \text{für alle } x \in P$$

b) Wir zeigen, dass ein Selbstmord vorliegt, indem wir beweisen:

$$\mathcal{F} \models kill_{aa}$$

Sei dazu B eine beliebige aussagenlogische Belegung und gelte $\models_{\mathsf{B}} A$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Gemäß Formel (2) muss $\mathsf{B}(kill_{xa}) = \mathtt{tt}$ gelten für ein $x \in P$. Wir zeigen nun, dass die Annahmen $\mathsf{B}(kill_{ba}) = \mathtt{tt}$ bzw. $\mathsf{B}(kill_{ca}) = \mathtt{tt}$ zu Widersprüchen führen.

Annahme (C) : $\mathsf{B}(kill_{ca}) = \mathsf{tt}$.

$$\begin{array}{rcl} (3) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{ca}) = \mathsf{tt} \\ (5) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{aa}) = \mathsf{ff} \end{array}$$

Die letzte Aussage steht im Widerspruch zu Aussage (6), also kann die Annahme (C) nicht zutreffen.

Annahme (B) : $\mathsf{B}(kill_{ba}) = \mathsf{tt}$.

$$\begin{array}{rcll} (4) & \Rightarrow & \mathsf{B}(richer_{ba}) = \mathsf{ff} & \\ (7) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{bb}) = \mathsf{tt} & \quad (*) \\ (B),(2) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{ba}) = \mathsf{tt} & \\ (8),(*) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{bc}) = \mathsf{ff} & \\ (7) & \Rightarrow & \mathsf{B}(hates_{ac}) = \mathsf{ff} & \end{array}$$

Die letzte Aussage steht ebenfalls im Widerspruch zu Formel (6), somit ist dieser Fall auch nicht möglich.

Obwohl nun also mit logischer Strenge bewiesen ist, dass Tante Agathe Selbstmord begangen hat, bleibt die Argumentation vielleicht etwas unbefriedigend. Das liegt daran, dass wir nicht gezeigt haben, dass unsere Annahmen $\mathcal{F}$ überhaupt erfüllbar sind. Gäbe es keine Belegung B, die alle Formeln in $\mathcal{F}$ erfüllt, so könnten wir mit derselben Berechtigung folgern, dass alle drei Hausbewohner Agathe umgebracht haben! Was wiederum zeigen würde, dass mathematische Logik und gesunder Menschenverstand nicht immer übereinstimmen. In unserem Fall können wir aber eine Belegung angeben, die alle Formeln in $\mathcal{F}$ erfüllt (und bei der natürlich auch ein Selbstmord vorliegt). Man kann leicht nachrechnen, dass die Belegung B, die genau die folgenden Aussagen erfüllt, ein Modell von $\mathcal{F}$ ist:

$$\{\ kill_{aa}, hate_{aa}, hate_{ac}, hate_{ba}, hate_{bc}, richer_{ba}\ \}$$

(Die letzte Aussage überzeugt uns davon, dass der Fall nur in England spielen kann.)

Aufgabe 1-2 **Allgemeingültige Formeln** (keine Abgabe)

Um zu zeigen, dass eine Formel nicht allgemeingültig ist, reicht es eine Belegung B anzugeben, die die Formel falsifiziert. Zum Nachweis der Allgemeingültigkeit aussagenlogischer Formeln sind verschiedene Verfahren gebräuchlich, z.B. Wahrheitstafeln, Karnaugh-Diagramme oder BDDs (boolean decision diagrams, kommen in der Vorlesung noch dran). Hier verwenden wir Widerspruchsbeweise, die bei (geschachtelten) Implikationen recht schnell zum Ziel führen.

1. $((A \to C) \land (B \to C)) \ \to \ ((A \land B) \to C)$ ist allgemeingültig.
   Angenommen, B wäre eine Belegung mit $\mathsf{B}(F) = \mathsf{ff}$. Dann wäre $\mathsf{B}(A \to C) = \mathsf{B}(B \to C) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(A \land B \to C) = \mathsf{ff}$, d.h. $\mathsf{B}(A) = \mathsf{B}(B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(C) = \mathsf{ff}$, im Widerspruch (z.B.) zu $\mathsf{B}(A \to C) = \mathsf{tt}$.

2. $F =_{\text{def}} ((A \land B) \to C) \ \to \ ((A \to C) \land (B \to C))$ ist nicht allgemeingültig.
   Sei etwa B eine Belegung mit $\mathsf{B}(A) = \mathsf{tt}$, $\mathsf{B}(B) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{B}(C) = \mathsf{ff}$. Dann ist $\mathsf{B}(A \land B) = \mathsf{ff}$, also ist $\mathsf{B}((A \land B) \to C) = \mathsf{tt}$. Andererseits ist $\mathsf{B}(A \to C) = \mathsf{ff}$, also auch $\mathsf{B}((A \to C) \land (B \to C)) = \mathsf{ff}$ und damit ist die gesamte Formel in B nicht erfüllt.

   Bemerkung: In obiger Argumentation haben wir A, B und C als atomare Formeln behandelt. Das heisst, wir haben gezeigt, dass es eine Instanz von F gibt, die nicht allgemeingültig ist (wenn nämlich für A, B und C drei paarweise verschiedene atomaren Formeln eingesetzt werden). Andererseits gibt es allgemeingültige Instanzen von F, z.B. wenn A und B dieselben Formeln sind.

3. $(A \to B) \ \to \ \neg(B \to A)$ ist nicht allgemeingültig, etwa $\mathsf{B}(A) = \mathsf{B}(B) = \mathsf{tt}$.

4. $(A \to B) \ \leftrightarrow \ (\neg B \to \neg A)$ ist allgemeingültig.
   Denn angenommen, B wäre eine Belegung mit $\mathsf{B}(A \to B) \neq \mathsf{B}(\neg B \to \neg A)$.

   Fall 1: $\mathsf{B}(A \to B) = \mathsf{tt}$, $\mathsf{B}(\neg B \to \neg A) = \mathsf{ff}$. Dann folgt $\mathsf{B}(\neg B) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(\neg A) = \mathsf{ff}$, also $\mathsf{B}(B) = \mathsf{ff}$ und $\mathsf{B}(A) = \mathsf{tt}$. Aber dann ist $\mathsf{B}(A \to B) = \mathsf{ff}$, Widerspruch.

Fall 2: $\mathsf{B}(A \to B) = \mathsf{ff}$, $\mathsf{B}(\neg B \to \neg A) = \mathsf{tt}$. Beweis ähnlich wie bei Fall 1.

5. $(A \to B) \vee (B \to A)$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B \vee \neg B \vee A$ und daher allgemeingültig.

Aufgabe 1-3 Folgebeziehung (keine Abgabe)

1. Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach $j - i$, formal also die Aussage

   Für alle $i \leq j \in \mathbb{N}$ mit $j - i = k$ und alle B mit $\mathsf{B}(v) = \mathsf{tt}$ für alle $v \in \mathcal{F}$ gilt $\mathsf{B}(v_i \to v_{i+j}) = \mathsf{tt}$

   durch Induktion nach k.

   $i - j = 0$: Für jede Belegung gilt $\mathsf{B}(v_i \to v_i) = \mathsf{tt}$.

   $i - j > 0$: Sei B eine Belegung mit $\mathsf{B}(v) = \mathsf{tt}$ für alle $v \in \mathcal{F}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

   $$\mathsf{B}(v_{i'} \to v_{j'}) = \mathsf{tt} \text{ für alle } i' \leq j' \text{ mit } j' - i' < i - j \qquad (*)$$

   Im Falle $\mathsf{B}(v_i) = \mathsf{ff}$ gilt die Behauptung nach Definition von $\mathsf{B}(\cdot \to \cdot)$. Sei also $\mathsf{B}(v_i) = \mathsf{tt}$. Da $v_i \to v_{i+1} \in \mathcal{F}$ gilt $\mathsf{B}(v_i \to v_{i+1}) = \mathsf{tt}$, also $\mathsf{B}(v_{i+1}) = \mathsf{tt}$ wieder nach Definition von $\mathsf{B}(\cdot \to \cdot)$. Da $\mathsf{B}(v_{i+1} \to v_j) = \mathsf{tt}$ nach Indutionsvoraussetzung und $\mathsf{B}(v_{i+1}) = \mathsf{tt}$, folgt $\mathsf{B}(v_j) = \mathsf{tt}$. Insgesamt also $\mathsf{B}(v_i) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(v_j) = \mathsf{tt}$, also $\mathsf{B}(v_i \to v_j) = \mathsf{tt}$.

2. Wir zeigen $\mathcal{F} \models (v_i \wedge \neg v_j) \to (v_j \to v_i)$ indem wir annehmen, es gibt $i, j \in \mathbb{N}_0$ für die obiges nicht gilt. Dann gibt es eine Belegung B mit

   - $\mathsf{B}(v) = \mathsf{tt}$ für alle $v \in \mathcal{F}$
   - $\mathsf{B}((v_i \wedge \neg v_j) \to (v_j \to v_i)) = \mathsf{ff}$.

   Aus der zweiten Aussage erhalten wir $\mathsf{B}(v_i \wedge \neg v_j) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(v_j \to v_i) = \mathsf{ff}$. Aus $\mathsf{B}(v_i \wedge \neg v_j) = \mathsf{tt}$ folgt $\mathsf{B}(v_i) = \mathsf{tt}$ und $\mathsf{B}(v_j) = \mathsf{ff}$, also $\mathsf{B}(v_j \to v_i) = \mathsf{tt}$, Widerspruch. Die Aussage $(v_i \wedge \neg v_j) \to (v_j \to v_i)$ ist also sogar allgemeingültig.

Aufgabe 1-4 Folgebeziehung zwischen Formeln (keine Abgabe)

Es ist im allgemeinen falsch, das für je zwei beliebige Formeln $A, B \in \mathcal{L}_{\mathrm{PL}}$ stets entweder $\models A \to B$ oder $\models B \to A$ gilt. Ist v eine aussagenlogische Variable und z.B. $A = v$ und $B = \neg v$, so gilt weder $\models v \to \neg v$ (für $\mathsf{B}(v) = \mathsf{tt}$ gilt $\mathsf{B}(v \to \neg v) = \mathsf{ff}$) noch $\models \neg v \to v$ (denn für $\mathsf{B}(v) = \mathsf{ff}$ gilt $\mathsf{B}(\neg v \to v) = \mathsf{ff}$).

Bemerkung: Ist die Menge $\mathcal{V}$ der Aussagenlogischen Variablen leer, so gilt für alle $A, B \in \mathcal{L}_{\mathrm{PL}}$ entweder $\models A \to B$ oder $\models B \to A$. Dies kann man wie folgt einsehen:

Für $\mathcal{V} = \emptyset$ gibt es genau eine belegung $\mathsf{B} : \emptyset \to \{\mathsf{tt}, \mathsf{ff}\}$. D.h. es gilt $\models C$ genau dann, wenn $\mathsf{B}(C) = \mathsf{tt}$ für alle $C \in \mathcal{L}_{\mathrm{PL}}(\emptyset)$. Im Fall $\mathsf{B}(A) = \mathsf{ff}$ erhalten wir $\mathsf{B}(A \to B) = \mathsf{tt}$ und $\models A \to B$. Im Fall $\mathsf{B}(B) = \mathsf{ff}$ analog $\models B \to A$, und im Fall $\mathsf{B}(A) = \mathsf{B}(B) = \mathsf{tt}$ gilt sowohl $\mathsf{B}(A \to B) = \mathsf{B}(B \to A) = \mathsf{tt}$, also sowohl $\models A \to B$ als auch $\models B \to A$.