3. DFA Spezialfall von NFA (mit $|\delta(z,a)| = 1$ für alle $z \in Z$, $a \in \Sigma$).

Satz 1.3.2 Zu jedem NFA M gibt es einen DFA M' mit $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$.

Satz 1.3.3 Zu jeder regulären Sprache L gibt es einen NFA M mit $\mathcal{L}(M) = L$.

Definition. Sei Σ ein Alphabet. Die Menge REG_Σ der ***regulären Ausdrücke*** über Σ ist induktiv definiert wie folgt:

1. $\emptyset \in \mathrm{REG}_\Sigma$, $\varepsilon \in \mathrm{REG}_\Sigma$ und $a \in \mathrm{REG}_\Sigma$ für alle $a \in \Sigma$.
2. Falls $r, s \in \mathrm{REG}_\Sigma$, so $(r \cdot s), (r + s), r^* \in \mathrm{REG}_\Sigma$.

Schreibkonventionen zur Klammerersparnis

- "Bindung" der Operationen: "$\cdot$ vor $+$".
- $r \cdot s \cdot t$ statt $(r \cdot s) \cdot t$ oder $r \cdot (s \cdot t)$, ebenso für $+$.
- äußerste Klammern weglassen.

Definition. Für $r \in \mathrm{REG}_\Sigma$ ist die ***durch r beschriebene Sprache*** $\mathcal{L}(r)$ induktiv definiert wie folgt:

1. $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathcal{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $\mathcal{L}(a) = \{a\}$ für $a \in \Sigma$.
2. $\mathcal{L}(r \cdot s) = \mathcal{L}(r) \circ \mathcal{L}(s)$,
   $\mathcal{L}(r + s) = \mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(s)$,
   $\mathcal{L}(r^*) = \mathcal{L}(r)^*$.

Definition. Zwei reguläre Ausdrücke r, s heißen ***äquivalent*** (in Zeichen: $r = s$), wenn $\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}(s)$ gilt.

Satz 1.3.4 Für jedes $r \in \mathrm{REG}_\Sigma$ (Σ gegeben) ist $\mathcal{L}(r)$ regulär.

Satz 1.3.5 Jede reguläre Sprache kann durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden.

Zusammenfassung

DFA's, NFA's, reguläre Ausdrücke und reguläre Grammatiken definieren alle genau die regulären Sprachen.

1.4 Einige strukturelle Eigenschaften regulärer Sprachen

Satz 1.4.1 Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter den Operationen Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Produkt, Kleene-Stern und Spiegelung. (D.h.: Sind L_1, L_2 reguläre Sprachen, so sind $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\bar{L_1}$, $L_1 \circ L_2$, L_1^*, L_1^{R} reguläre Sprachen.)

Satz 1.4.2 (Pumping-Lemma) Sei L eine reguläre Sprache über Σ. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt: Zu jedem $x \in L$ mit $|x| \geq n$ gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $x = uvw$ und

1. $|v| \geq 1$,
2. $|uv| \leq n$,
3. Für jedes $k \geq 0$ ist $uv^k w \in L$.

Definition. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine formale Sprache. Die Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist gegeben durch:

$$x \sim_L y \iff \text{für alle } w \in \Sigma^* \text{ gilt } xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$$

(Anfügen von beliebigem w an x, y ändert nichts an deren Mitgliedschaft in L).

Lemma 1.4.3

a) Falls $x \sim_L y$, so $x \in L \Leftrightarrow y \in L$.

b) $\sim_L$ ist eine Äquivalenzrelation auf Σ^*.

Definition. Für $x \in \Sigma^*$ bezeichne $[x]_{\sim_L}$ (oder kurz $[x]$) die Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim_L$. (D.h.: $[x]_{\sim_L} = \{y \in \Sigma^* \mid x \sim_L y\}$.) Der ***Index*** $\mathcal{I}(\sim_L)$ von $\sim_L$ ist die Anzahl $|\Sigma^*/\sim_L|$ der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim_L$.

Satz 1.4.4 (Satz von Myhill–Nerode) Eine Sprache L (über Σ) ist genau dann regulär, wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist.

Bemerkung

Satz 1.4.4 ist eine weitere Charakterisierung der regulären Sprachen. Anwendungen:

1. Test auf Regularität.
2. Konstruktion von ***Minimalautomaten***.
   (Minimalautomat für reguläre Sprache L: DFA M, $\mathcal{L}(M) = L$, mit minimaler Anzahl von Zuständen.)