Operationen auf Funktionen

- ***Einsetzung E***

  Gegeben $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0,\ g_1 : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0,\ \dots,\ g_n : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$.
  $E(f, g_1, \dots, g_n) : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ (“Einsetzung der g_i in f”),
  $E(f, g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_k) = f(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_n(x_1, \dots, x_k))$.

- ***Primitive Rekursion PR***

  Gegeben $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0,\ g : \mathbb{N}_0^{k+2} \to \mathbb{N}_0$.
  $PR(f, g) : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$,
  $PR(f, g)(x_1, \dots, x_k, 0) = f(x_1, \dots, x_k)$,
  $PR(f, g)(x_1, \dots, x_k, y + 1) = g(x_1, \dots, x_k, y, PR(f, g)(x_1, \dots, x_k, y))$.

Induktive Definition der primitiv-rekursiven Funktionen

1. Die Funktionen C^k, S, U_i^k ($1 \le i \le k$), $k \in \mathbb{N}_0$, sind primitiv-rekursiv.
2. Sind $f, g_1, \dots, g_n$ primitiv-rekursive Funktionen, so ist $E(f, g_1, \dots, g_n)$ eine primitiv-rekursive Funktion.
3. Sind f, g primitiv-rekursive Funktionen, so ist $PR(f, g)$ eine primitiv-rekursive Funktion.

Es gilt:

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ ist genau dann primitiv-rekursiv, wenn sie LOOP-berechenbar ist.

Bemerkungen

1. Alle “üblichen” Funktionen (Prädikate) sind primitiv-rekursiv:
   $x + y$, $x * y$, x^y, $max(x, y)$, $min(x, y)$, $x\ div\ y$, $x\ mod\ y$, $x!$, …,
   $x = y$, $x < y$, $x \mid y$, … .
2. Weitere primitiv-rekursive Funktionen (falls f primitiv-rekursiv):
   $\sum_{i=x}^{y} f(x_1, \dots, x_k, i)$, $\prod_{i=x}^{y} f(x_1, \dots, x_k, i)$.

Die Kodierungsfunktion γ

Für $i = 1, 2, 3, \dots$ sei p_i die i-te Primzahl ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$).

Sei $\gamma : \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ definiert durch:

$$\gamma(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0 \\ 2^{x_1} * 3^{x_2} * \dots * p_k^{x_k}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt:

- γ ist primitiv-rekursiv.
- Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$, $m \ne 0$, gibt es eine Primfaktorzerlegung
  $m = 2^{m_1} * 3^{m_2} * \dots * p_n^{m_n}$
  (eindeutig bis auf eventuell weitere Faktoren p_{n+l}^0, $l > 0$).
- Es gibt primitiv-rekursive Funktionen $gpr : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $exp : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit
  $gpr(x) =$ größtes n, so dass x durch p_n teilbar ist
  (falls $x > 1$, sonst 0),
  $exp(x, y) =$ Exponent von p_x in der Primfaktorzerlegung von y
  (falls $x, y > 0$, sonst 0).
- $exp(x, y) = 0$ für $x > gpr(y)$.
- $exp(i, \gamma(x_1, \dots, x_k)) = \begin{cases} x_i, & \text{falls } 1 \le i \le k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Bemerkung

In der Praxis sind oft weitere Rekursionsformen gebräuchlich, die sich alle durch PR ausdrücken lassen und somit nicht aus der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen herausführen. Z.B.: (Schreibweise: $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$)

- ***Wertverlaufsrekursion***

  $h = WVR(f, g)$,
  $h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$,
  $h(\vec{x}, y + 1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, 0), \dots, h(\vec{x}, y))$.

- ***Simultane Rekursion***

  Für $i = 1, \dots, n$:
  $h_i = SR(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$,
  $h_i(\vec{x}, 0) = f_i(\vec{x})$,
  $h_i(\vec{x}, y + 1) = g_i(\vec{x}, y, h_1(\vec{x}, y), \dots, h_n(\vec{x}, y))$.

Weitere Operation auf Funktionen:

- ***Minimalisierung*** **(*μ-Operator*)** μ

  Gegeben $f : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$.
  Sei $M = \{y \in \mathbb{N}_0 \mid f(x_1, \dots, x_k, y')$ ist definiert für alle $y' \le y$ und $f(x_1, \dots, x_k, y) = 0\}$.

  $\mu(f) : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$,
  $\mu(f)(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} min(M), & \text{falls } M \ne \emptyset \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$