Definition. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\hat{T} : \mathbb{N}_0^{k+2} \to \mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$\hat{T}(x, x_1, \ldots, x_k, y) = 1 \dot{-} T(x, x_1, \ldots, x_k, y).$$

Die Funktion $\Phi_k : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\Phi_k(z, x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} erg(\mu(\hat{T})(z, x_1, \ldots, x_k)), & \text{falls } z \text{ Gödelnummer einer TM ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

heißt ***(k-te) universelle Funktion***.

Satz 2.4.1 Die Funktionen Φ_k ($k \in \mathbb{N}_0$) sind μ-rekursiv.

Satz 2.4.2 Sei $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ eine Turing-berechenbare Funktion. f werde berechnet durch eine TM mit der Gödelnummer t. Dann gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_k).$$

Satz 2.4.3 Für jede Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ gilt:
f μ-rekursiv $\Longleftrightarrow f$ Turing-berechenbar $\Longleftrightarrow f$ `WHILE`-berechenbar.

Bemerkungen

1. Bedeutung von Satz 2.4.3: Alle Ansätze zur Formalisierung des Begriffs *berechenbar* sind gleichwertig (dies gilt auch für weitere, hier nicht behandelte Ansätze). Dies rechtfertigt die ***Churchsche These***:

   Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ ist genau dann (im intuitiven Sinne) berechenbar, wenn sie μ-rekursiv (Turing-/`WHILE`-/...-berechenbar) ist.

2. Sprechweise daher oft: f ***berechenbar*** (statt μ-rekursiv, Turing-/`WHILE`-/...-berechenbar).

3. Aus Satz 2.4.2 folgt: Durchläuft z alle natürlichen Zahlen, so durchläuft $\Phi_k(z, \ldots)$ alle berechenbaren Funktionen $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$.

4. Aus den Sätzen 2.4.1 und 2.4.3 folgt: Es gibt `WHILE`-Programme und Turingmaschinen zur Berechnung der Φ_k. Diese heißen ***universelle Programme*** bzw. ***universelle Turingmaschinen*** und berechnen bei Eingabe von $z, x_1, \ldots, x_k$ das Ergebnis der Berechnung der Turingmaschine mit Gödelnummer z für die Eingabe $x_1, \ldots, x_k$ (falls z eine solche Gödelnummer ist, sonst 0).

Satz 2.4.4 (Kleenesches Normalformtheorem, vereinfachte Fassung)
Jede berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ lässt sich darstellen als

$$f(x_1, \ldots, x_k) = g(\mu(h)(x_1, \ldots, x_k))$$

mit primitiv-rekursiven Funktionen $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $h : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$.

Bemerkung

Aus Satz 2.4.4 folgt: Jede berechenbare Funktion kann durch ein `WHILE`-Programm berechnet werden, das nur eine **while**-Schleife enthält.

Satz 2.4.5 Zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine totale berechenbare Funktion $S_k : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$, so dass für alle $z, x, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\Phi_{k+1}(z, x, y_1, \ldots, y_k) = \Phi_k(S_k(z, x), y_1, \ldots, y_k).$$

Bemerkungen

1. Die Funktionen S_k sind sogar primitiv-rekursiv.

2. Es gilt noch allgemeiner (***S-m-n-Theorem***): Zu $m, n \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine primitiv-rekursive Funktion $S_{m,n} : \mathbb{N}_0^{m+1} \to \mathbb{N}_0$ mit

   $$\Phi_{m+n}(z, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \Phi_n(S_{m,n}(z, x_1, \ldots, x_m), y_1, \ldots, y_n).$$

2.5 Entscheidbarkeit und rekursive Aufzählbarkeit

Grundschema von ***Entscheidungsproblemen***:

Gegeben "Objekte" $x_1, \ldots, x_k$,
bestimme, ob $x_1, \ldots, x_k$ die "Eigenschaft" ϱ erfüllen.

Normierung (analog wie bei Funktionen):

$x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}_0$ (gegebenenfalls durch Kodierung);
ϱ dargestellt durch Menge (Relation) $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$:

$(x_1, \ldots, x_k) \in R \mathrel{\hat{=}}$ die $x_1, \ldots, x_k$ erfüllen ϱ.

Charakteristische Funktion von $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$:

$\chi_R : \mathbb{N}_0^k \to \{0, 1\}$,
$\chi_R(x_1, \ldots, x_k) = 1 \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_k) \in R$.

Definition. Eine Menge $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$ heißt ***entscheidbar*** (***rekursiv***), wenn χ_R berechenbar ist.

Selbstanwendungsproblem (spezielles Halteproblem) (für TM)

$SANW = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \Phi_1(n, n) \text{ ist definiert}\}$.

Halteproblem (für TM)

$H = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid \Phi_1(n, m) \text{ ist definiert}\}$.

Satz 2.5.1 Das Selbstanwendungsproblem und das Halteproblem sind nicht entscheidbar.