Für $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$ sei $\chi_R{}' : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ mit $\chi_R{}'(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x_1, \ldots, x_k) \in R \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Definition Eine Menge $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$ heißt ***rekursiv aufzählbar*** (***semi-entscheidbar***, ***semi-rekursiv***), wenn $\chi_R{}'$ berechenbar ist.

Satz 2.5.2 Eine Menge $R \subseteq \mathbb{N}_0^k$ ist entscheidbar genau dann, wenn sowohl R als auch $\bar{R}$ $(= \mathbb{N}_0^k \setminus R)$ rekursiv aufzählbar sind.

Bemerkungen

1. R rekursiv aufzählbar $\iff$ R ist Definitionsbereich der berechenbaren Funktion $\chi_R{}'$.
2. Allgemeiner gilt:
   R rekursiv aufzählbar $\iff$ es gibt berechenbare Funktion f mit
   $(x_1, \ldots, x_k) \in R \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_k)$ definiert.
3. $R \subseteq \mathbb{N}_0$ rekursiv aufzählbar $\iff$ $R = \emptyset$ oder es gibt eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $R = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
4. Dieser Zusammenhang liefert die Erklärung für den Begriff *rekursiv aufzählbar*:
   $R = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$, d.h. R wird aufgezählt durch berechenbare (es genügt sogar: primitiv-rekursive) Funktion.

2.6 Unentscheidbare Probleme

Definition. Seien $M, N \subseteq \mathbb{N}_0$ Mengen. M heißt ***auf*** N ***reduzierbar***, wenn es eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x \in M \iff f(x) \in N.$$

(Schreibweise: $M \leq N$ oder $f : M \leq N$.)

Satz 2.6.1 Seien $M, N \subseteq \mathbb{N}_0$, $M \leq N$. Ist N entscheidbar (bzw. rekursiv aufzählbar), so ist M entscheidbar (bzw. rekursiv aufzählbar).

Halteproblem bei fester Eingabe

$H_m = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \Phi_1(n, m) \text{ ist definiert}\}$.

Satz 2.6.2 **(Satz von Rice)** Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller berechenbaren Funktionen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ mit $\mathcal{G} \neq \emptyset$ und $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$. Dann ist die Menge

$$R_{\mathcal{G}} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f_n \in \mathcal{G}\}$$

(wobei $f_n(y) = \Phi_1(n, y)$) nicht entscheidbar.

Äquivalenzproblem für TM

$\ddot{A} = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0^2 \mid \Phi_1(m, x) = \Phi_1(n, x) \text{ für alle } x \in \mathbb{N}_0\}$.

Probleme mit Zeichenreihen

- Einfachste Standardform:

  Sprache L über Alphabet Σ fest vorgegeben.
  Problem: Gegeben $w \in \Sigma^*$, entscheide, ob $w \in L$.

- Zwei Möglichkeiten der Behandlung:
  1. Gemäß bisherigem Aufbau der Theorie: Kodierung von Wörtern aus Σ^* in $\mathbb{N}_0$ führt zu $L \subseteq \mathbb{N}_0$ und kann weiter wie bisher behandelt werden.
  2. Alternative: TM können nicht nur Funktionen $\mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ berechnen, sondern direkt auf Zeichenreihen arbeiten.
     Modifizierung des Entscheidbarkeits- (und Berechenbarkeits-) Begriffs:
     $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ (Turing-)berechenbar, wenn es eine (deterministische) TM gibt mit

     $$f(x) = y \iff z_0 x \vdash^* \Box \ldots \Box z_e y \Box \ldots \Box \quad (z_e \in E).$$

     $L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar, wenn $\chi_L : (\Sigma \cup \{0,1\})^* \to (\Sigma \cup \{0,1\})^*$ mit

     $$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

     berechenbar ist.

Spezielles Wortproblem

Gegeben eine (feste) Grammatik G.
Frage: Ist $\mathcal{L}(G)$ entscheidbar?

Satz 2.6.3 Das spezielle Wortproblem für eine Typ-0-Grammatik G ist i.a. nicht entscheidbar.

Bemerkungen

1. Aus Satz 2.6.3 folgt: Das (allgemeine) Wortproblem für Typ-0-Sprachen ist nicht entscheidbar.