

Schreib-/Sprechweisen

- $\Rightarrow, \Rightarrow^*$ statt $\Rightarrow_G, \Rightarrow_G^*$, wenn Kontext klar.
- $u \Rightarrow v$: v **direkt ableitbar** aus u .
- $u \Rightarrow^* v$: v **ableitbar** aus u .
- Folge $w_0, \dots, w_n \in (V \cup \Sigma)^*$ mit $S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n \in \Sigma^*$: **Ableitung** von w_n (in G).

Beispiele für Grammatiken

1. G_1 mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow abc \\ S &\rightarrow aAbc \\ A &\rightarrow abC \\ A &\rightarrow aAbC \\ Cb &\rightarrow bC \\ Cc &\rightarrow cc \end{aligned}$$
2. G_2 : $V = \{A, T, F, I\}, \Sigma = \{(\cdot, +, -, *, /, x, y\}, S = A$, Produktionen:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow T \mid A+T \mid A-T \\ T &\rightarrow F \mid T*F \mid T/F \\ F &\rightarrow I \mid (A) \\ I &\rightarrow x \mid y \end{aligned}$$
3. G_3 : Startvariable G , Produktionen:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow aU \mid bG \mid \varepsilon \\ U &\rightarrow aG \mid bU \end{aligned}$$

Definition. Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ heißt **ε -produktionsfrei**, wenn gilt: G enthält keine Regel der Form $u \rightarrow \varepsilon$ mit $u \neq S$, und falls G die Regel $S \rightarrow \varepsilon$ enthält, so gilt für alle Regeln $u \rightarrow v$ von G , dass S nicht in v vorkommt.

Es gilt:

Falls Grammatik G ε -produktionsfrei, so: $\varepsilon \in \mathcal{L}(G) \iff S \rightarrow \varepsilon$ ist Regel von G .

1.2 Die Chomsky-Hierarchie

Einteilung der Grammatiken nach Gestalt der Produktionen (Chomsky-Hierarchie)

- **Typ-0-Grammatik:** keine Einschränkungen.
- **Typ-1-Grammatik (kontextsensitive Grammatik):**

Die Grammatik ist ε -produktionsfrei, und jede Regel (mit der eventuellen Ausnahme von $S \rightarrow \varepsilon$) ist von der Form $uAv \rightarrow uvv$ mit $A \in V, u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ und $x \in (V \cup \Sigma)^+$ (kontextsensitive Regel).

- **Typ-2-Grammatik (kontextfreie Grammatik):**

Jede Regel ist von der Form $A \rightarrow x$ mit $A \in V$ und $x \in (V \cup \Sigma)^*$ (kontextfreie Regel).

- **Typ-3-Grammatik (reguläre Grammatik):**

Jede Regel ist von der Form $A \rightarrow aB$ (rechtlineare Regel) oder $A \rightarrow a$ oder $A \rightarrow \varepsilon$ mit $A, B \in V$ und $a \in \Sigma$.

Eine Sprache L ist eine **Typ- i -Sprache** ($i = 0, \dots, 3$), wenn es eine Typ- i -Grammatik G gibt mit $L = \mathcal{L}(G)$. Die Typ-1-, Typ-2- und Typ-3-Sprachen heißen auch **kontextsensitiv**, **kontextfrei** bzw. **reguläre Sprachen**.

Bemerkungen

1. In einer Typ-1-Grammatik ist jede Regel $u' \rightarrow v'$ (mit der eventuellen Ausnahme von $S \rightarrow \varepsilon$) **wortlängenmonoton**, d.h. es gilt $|u'| \leq |v'|$.
2. Jede ε -produktionsfreie Typ-2-Grammatik ist auch eine Typ-1-Grammatik.
3. Jede Typ-3-Grammatik ist auch eine Typ-2-Grammatik.
4. Intuition von "kontextsensitiv":
Regel $uAv \rightarrow uvv$: A kann im Kontext von u und v durch x ersetzt werden.
5. Intuition von "kontextfrei":
Regel $A \rightarrow x$: A kann durch x ersetzt werden unabhängig vom Kontext, in dem es steht.
6. Alle "praktisch" vorkommenden formalen Sprachen sind (höchstens) kontextsensitiv.
7. Syntax von Programmiersprachen: fast immer durch kontextfreie Grammatiken (Kontextbedingungen müssen zusätzlich angegeben werden, z.B. Typkorrektheit, Deklaration aller verwendeten Variablen usw.).