

Übungen zu Einführung in die Informatik IV
(Prof. Dr. F. Kröger, Dr. P. Kosiuczenko, D. Pattinson)

Aufgabe 40

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $\Gamma = \{a, b, c, \square, \#\}$.

Makros sind häufig benötigte einfache Turingmaschinen, die von anderen Turingmaschinen "aufgerufen" werden können, indem diese in den Anfangszustand des Makros übergehen.

- a) Geben Sie für $M \subseteq \Gamma$ ein Makro $L(M, z) = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, l(M, z), \square, \emptyset)$ an, das den Kopf der Turingmaschine so lange nach links bewegt, bis ein Zeichen $a \in M$ unter dem Kopf steht. Das Makro soll dann in den Zustand z übergehen.
- b) Geben Sie für $M \subseteq \Gamma$ ein Makro $R(M, z)$ mit Anfangszustand $r(m, z)$ an, das den Kopf so lange nach rechts bewegt, bis ein Zeichen $a \in M$ unter dem Kopf steht. Danach soll das Makro in den Zustand z übergehen.
- c) Geben Sie für $M \subseteq \Gamma$ ein Makro $S(M, g, n)$ mit Anfangszustand $s(M, g, n)$ an, das den Kopf so lange nach links bewegt, bis sich entweder ein Leerzeichen oder ein Zeichen $a \in M$ unter dem Kopf befindet. Hat das Makro ein $a \in M$ gefunden, soll es in den Zustand g („gefunden“) übergehen, ansonsten in den Zustand n („nicht gefunden“).
- d) Geben Sie mit Hilfe obiger Makros eine Turingmaschine M an mit $\mathcal{L}(M) = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$ sowie eine Folge von Konfigurationen, die M beim Akzeptieren des Wortes $abcab$ durchläuft.

Aufgabe 41

Betrachten Sie die Funktion $paar^2(x, y) = x + \sum_{i=1}^{x+y} i$ aus der Vorlesung. Zeigen Sie:

- a) $paar^2 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist bijektiv.
- b) Ist $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ LOOP-berechenbar, so ist auch $g(x, y) = \sum_{i=x}^y f(i)$ LOOP-berechenbar.
- c) Die Funktion $paar^2$ ist LOOP-berechenbar.

Bemerkung: Gemäß den Bemerkungen in der Vorlesung dürfen Sie Zuweisungen der Art $x := y + z$ und $x := y - z$ in LOOP-Programmen verwenden.

Aufgabe 42

Sei ack die Ackermannfunktion aus der Vorlesung. Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$:

- a) $y < ack(x, y)$
- b) $ack(x, y) < ack(x, y + 1)$
- c) $ack(x, y + 1) \leq ack(x + 1, y)$
- d) $ack(x, y) < ack(x + 1, y)$

Bitte wenden!

Aufgabe 43 (H, 2 + 2 + 2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $\Gamma = \{a, b, c, \square, \#\}$.

- a) Geben Sie ein Makro $\mathbf{M}(M, g, n)$ mit Startzustand $\mathbf{m}(M, g, n)$ an, das genauso wie $\mathbf{S}(M, g, n)$ aus Aufgabe 40 funktioniert, mit dem Unterschied, dass ein gefundenes Zeichen $a \in M$ mit einem $\#$ überschrieben (markiert) wird.
- b) Konstruieren Sie mit Hilfe des obigen Makros eine Turingmaschine M mit $\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b + |w|_c\}$. Sie können hierbei die in Aufgabe 40 bereits definierten Makros verwenden.
- c) Geben Sie eine Folge von Zuständen an, die M beim Akzeptieren des Wortes *abbaac* durchläuft. Zustandsübergänge, die innerhalb eines verwendeten Makros auftreten, müssen nicht explizit gemacht werden, sondern können durch $\vdash^*$ abgekürzt werden.

Aufgabe 44 (H, 2 + 4 Punkte)

Seien π_1^2 und π_2^2 die Umkehrfunktionen von paar^2 aus der Vorlesung. Zeigen Sie:

- a) Für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ gilt $x \leq \text{paar}^2(x, y)$ und $y \leq \text{paar}^2(x, y)$.
- b) Die Funktionen π_1^2 und $\pi_2^2 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ sind LOOP-berechenbar.

Bemerkung: Gemäß den Bemerkungen in der Vorlesung dürfen Sie zusätzlich zu den Zuweisungen $x := y + z$ und $x := y - z$ auch Fallunterscheidungen der Form **if** $x = y$ **then** P_1 **else** P_2 **endif** verwenden.

Abgabe: In der Woche vom 2. bis 6. Juli in den Übungen.