Ludwig-Maximilians-Universität München **SS 2001**
Institut für Informatik **Begleitblatt 1**
Dr. S. Merz

Temporale Logik

Überblick: “Klassische Logik”

1. Aussagenlogik

Sei $\mathcal{V}$ eine (höchstens abzählbar unendliche) Menge von *atomaren Aussagen*.

Sprache $\mathcal{L}_{AL}(\mathcal{V})$ (kurz: $\mathcal{L}_{AL}$) der Aussagenlogik.

Alphabet:

- alle Elemente von $\mathcal{V}$
- die Zeichen **false**, $\rightarrow$, (,)

Induktive Definition der *Formeln*:

1. Jede atomare Aussage $v \in \mathcal{V}$ ist eine Formel.
2. **false** ist eine Formel.
3. Sind A und B Formeln, so ist auch $(A \rightarrow B)$ eine Formel.

Abkürzungen:

$\neg A$	für	$A \rightarrow$ **false**
$A \vee B$	für	$\neg A \rightarrow B$
$A \wedge B$	für	$\neg(A \rightarrow \neg B)$
$A \leftrightarrow B$	für	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
true	für	$\neg$**false**

Semantik. Vorgegeben ist die Menge $\{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$ von *Wahrheitswerten*.
Eine *Belegung* $\mathbb{B}$ für $\mathcal{L}_{AL}(\mathcal{V})$ ist eine Abbildung $\mathbb{B} : \mathcal{V} \rightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$.
Induktive Fortsetzung einer gegebenen Belegung $\mathbb{B}$ auf alle Formeln von $\mathcal{L}_{AL}(\mathcal{V})$:

1. $\mathbb{B}(v)$ für $v \in \mathcal{V}$ ist gegeben.
2. $\mathbb{B}(\textbf{false}) = \mathbf{f}$.
3. $\mathbb{B}(A \rightarrow B) = \mathbf{t} \iff \mathbb{B}(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbb{B}(B) = \mathbf{t}$.

Für die weiteren Operatoren gilt dann:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{B}(\neg A) = \mathbf{t} & \iff & \mathbb{B}(A) = \mathbf{f} \\
\mathbb{B}(A \vee B) = \mathbf{t} & \iff & \mathbb{B}(A) = \mathbf{t} \text{ oder } \mathbb{B}(B) = \mathbf{t} \\
\mathbb{B}(A \wedge B) = \mathbf{t} & \iff & \mathbb{B}(A) = \mathbf{t} \text{ und } \mathbb{B}(B) = \mathbf{t} \\
\mathbb{B}(A \leftrightarrow B) = \mathbf{t} & \iff & \mathbb{B}(A) = \mathbb{B}(B) \\
\mathbb{B}(\textbf{true}) = \mathbf{t} & &
\end{array}
$$

Eine Formel A von $\mathcal{L}_{AL}$ heißt *gültig in* $\mathbb{B}$ (in Zeichen $\models_{\mathbb{B}} A$), wenn $\mathbb{B}(A) = \mathbf{t}$ gilt. A heißt *allgemeingültig* (*Tautologie*, $\models A$), wenn $\models_{\mathbb{B}} A$ gilt für alle $\mathbb{B}$. A *folgt aus* einer Formelmenge $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models A$ bzw. $B_1, \ldots, B_n \models A$, falls $\mathcal{F} = \{B_1, \ldots, B_n\}$), wenn $\models_{\mathbb{B}} A$ gilt für jede Belegung $\mathbb{B}$ mit $\models_{\mathbb{B}} B$ für alle $B \in \mathcal{F}$.

Formale Systeme.

Ein *formales System* Σ ist gegeben durch:

- Axiome (Formeln einer logischen Sprache),
- Herleitungsregeln der Gestalt

  $$A_1, \dots, A_n \vdash B \quad (n \geq 1)$$

  mit Formeln $A_1, \dots, A_n, B$. Die Formeln $A_1, \dots, A_n$ heißen *Prämissen*, B heißt *Konklusion* (der Regel).

Induktive Definition der *Herleitbarkeit* einer Formel F in Σ (in Zeichen: $\vdash F$, $\underset{\Sigma}{\vdash} F$):

1. Jedes Axiom ist herleitbar.
2. Ist $A_1, \dots, A_n \vdash B$ eine Regel und sind $A_1, \dots, A_n$ herleitbar, so ist auch B herleitbar.

Ein formales System Σ_{AL} der Aussagenlogik.

Axiome: (Axiomenschemata)

(al1) $A \to (B \to A)$
(al2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(al3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Regel: (Regelschema)

(mp) $A, A \to B \vdash B$

Es gilt:

- $A \vdash B \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash A \to B$
- $A_1, \dots, A_n \vdash B \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to B$
- $\mathcal{F} \vdash A \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} \models A$ (*Korrektheit* von Σ_{AL})
- $\mathcal{F} \models A \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} \vdash A$ (*Vollständigkeit* von Σ_{AL})
- insbesondere: $\vdash A \quad \Longleftrightarrow \quad \models A$

2. Prädikatenlogik (1. Stufe)

Signaturen. Eine *Signatur* $SIG = (S, F, P)$ ist gegeben durch:

- eine Menge S von *Sorten*,
- für jedes $\sigma \in S^*$, $s \in S$ eine höchstens abzählbar unendliche Menge $F^{(\sigma,s)}$ von (σ, s)-*Funktionszeichen* (falls $\sigma = \varepsilon$: *Konstanten*), und
- für jedes $\sigma \in S^*$ eine höchstens abzählbar unendliche Menge $P^{(\sigma)}$ von σ-*Prädikatszeichen* (falls $\sigma = \varepsilon$: *atomare Aussagen*).

Prädikatenlogische Sprache $\mathcal{L}_{PL}(SIG)$ (kurz: $\mathcal{L}_{PL}$) 1. Stufe über einer Signatur $SIG = (S, F, P)$.

Alphabet:

- alle Zeichen von $F^{(\sigma,s)}$ und $P^{(\sigma)}$, für alle $\sigma \in S^*$, $s \in S$,
- für jedes $s \in S$ eine abzählbar unendliche Menge $\mathcal{X}_s$ von *(Individuen-)Variablen,*
- das *Gleichheitszeichen* $=$,
- die Zeichen **false**, $\rightarrow$, $\exists$, (,).

Induktive Definition der *Terme* (mit ihren *Sorten*)

1. Jede Variable aus $\mathcal{X}_s$ ist ein Term der Sorte s.
2. Ist $f \in F^{(s_1 \dots s_n, s)}$ ein $(s_1 \dots s_n, s)$-Funktionszeichen und sind $t_1, \dots, t_n$ Terme der Sorten $s_1, \dots, s_n$, so ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term der Sorte s.

Atomare Formeln: Alle Zeichenreihen der Gestalt

- $p(t_1, \dots, t_n)$, wobei $p \in P^{(s_1 \dots s_n)}$ ein $(s_1 \dots s_n)$-Prädikatszeichen und $t_1, \dots, t_n$ Terme der Sorten $s_1, \dots, s_n$ sind.
- $t_1 = t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme gleicher Sorte sind.

Induktive Definition der *Formeln*:

1. Jede atomare Formel ist eine Formel.
2. **false** ist eine Formel, und sind A und B Formeln, so ist $(A \rightarrow B)$ eine Formel.
3. Ist A eine Formel und $x \in \mathcal{X}_s$ für ein $s \in S$, so ist $\exists x\, A$ eine Formel.

Abkürzungen und Schreibweisen: wie in der Aussagenlogik, zusätzlich

$$\begin{array}{lll} \forall x\, A & \text{für} & \neg\exists x\, \neg A \\ t_1 \neq t_2 & \text{für} & \neg(t_1 = t_2) \end{array}$$

Das Auftreten einer Variablen x in einer Formel A heißt *gebunden*, wenn es in einer Teilformel $\exists x\, B$ vorkommt; andernfalls heißt es *frei*.

Schreibweise: $A_x(t)$ für die Formel, die sich aus A durch Ersetzen jedes freien Vorkommens von x durch t ergibt. Dabei seien x und t von gleicher Sorte, und t enthalte keine Variablen, die in A gebunden vorkommen.

Semantik. Eine *Struktur* $\mathbb{S}$ für eine Signatur $SIG = (S, F, P)$ ist gegeben durch:

- eine Trägermenge $|\mathbb{S}|_s \neq \emptyset$ für jedes $s \in S$,
- eine Abbildung $\mathbb{S}(f) : |\mathbb{S}|_{s_1} \times \cdots \times |\mathbb{S}|_{s_n} \rightarrow |\mathbb{S}|_s$ für jedes $(s_1 \dots s_n, s)$-Funktionszeichen f (falls $n = 0$: $\mathbb{S}(f) \in |\mathbb{S}|_s$),
- eine Relation $\mathbb{S}(p) : |\mathbb{S}|_{s_1} \times \cdots \times |\mathbb{S}|_{s_n} \rightarrow \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$ für jedes $s_1 \dots s_n$-Prädikatszeichen p (falls $n = 0$: $\mathbb{S}(p) \in \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$).

Eine *Variablenbelegung* ξ (bzgl. $\mathbb{S}$) ist eine Zuordnung von je einem Element $\xi(x) \in |\mathbb{S}|_s$ zu jeder Variablen $x \in \mathcal{X}_s$ (für alle $s \in S$).

Induktive Definition von $\mathbb{S}^{(\xi)}(t) \in |\mathbb{S}|_s$ für Terme t der Sorte s:

1. $\mathbb{S}^{(\xi)}(x) = \xi(x) \quad$ für $x \in \mathcal{X}_s$.
2. $\mathbb{S}^{(\xi)}(f(t_1,\ldots,t_n)) = \mathbb{S}(f)(\mathbb{S}^{(\xi)}(t_1),\ldots,\mathbb{S}^{(\xi)}(t_n))$.

Definition von $\mathbb{S}^{(\xi)}(A)$ für atomare Formeln A:

1. $\mathbb{S}^{(\xi)}(p(t_1,\ldots,t_n)) = \mathbb{S}(p)(\mathbb{S}^{(\xi)}(t_1),\ldots,\mathbb{S}^{(\xi)}(t_n))$.
2. $\mathbb{S}^{(\xi)}(t_1 = t_2) = \mathbf{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^{(\xi)}(t_1) = \mathbb{S}^{(\xi)}(t_2)$.

Induktive Fortsetzung von $\mathbb{S}^{(\xi)}$ auf alle Formeln:

1. $\mathbb{S}^{(\xi)}(A)$ für atomare Formeln A ist bereits definiert.
2. $\mathbb{S}^{(\xi)}(\textbf{false}) = \mathbf{f}$.
3. $\mathbb{S}^{(\xi)}(A \to B) = \mathbf{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^{(\xi)}(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathbb{S}^{(\xi)}(B) = \mathbf{t}$.
4. $\mathbb{S}^{(\xi)}(\exists x\ A) = \mathbf{t} \quad \Longleftrightarrow \quad$ es gibt ξ' mit $\xi' \sim_x \xi$ und $\mathbb{S}^{(\xi')}(A) = \mathbf{t}$.
   (Dabei: $\xi' \sim_x \xi \quad \Longleftrightarrow \quad \xi'(y) = \xi(y)$ für $y \not\equiv x$.)

Für $\forall x\ A$ gilt dann:

$$\mathbb{S}^{(\xi)}(\forall x\ A) = \mathbf{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } \xi' \text{ mit } \xi' \sim_x \xi \text{ gilt } \mathbb{S}^{(\xi')}(A) = \mathbf{t}.$$

Eine Formel A von $\mathcal{L}_{PL}$ heißt *gültig in* $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}$ *erfüllt* A, $\models_{\mathbb{S}} A$), wenn $\mathbb{S}^{(\xi)}(A) = \mathbf{t}$ für jede Belegung ξ gilt. A heißt *allgemeingültig* ($\models A$), wenn $\models_{\mathbb{S}} A$ gilt für alle $\mathbb{S}$. A *folgt aus* einer Formelmenge $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models A$ bzw. $B_1,\ldots,B_n \models A$), wenn $\models_{\mathbb{S}} A$ gilt für jedes $\mathbb{S}$ mit $\models_{\mathbb{S}} B$ für alle $B \in \mathcal{F}$.

Ein formales System Σ_{PL} der Prädikatenlogik (korrekt und vollständig)

Axiome:

	alle Axiome von Σ_{AL}
$(\exists I)$	$A_x(t) \to \exists x\ A$
(eq1)	$x = x$
(eq2)	$x = y \to (A \to A_x(y))$

Regeln:

(mp)	$A, A \to B \vdash B$	
(part)	$A \to B \vdash \exists x\ A \to B$ falls x in B nicht frei vorkommt	*(Partikularisierung)*

3. Theorien

Eine *(prädikatenlogische) Theorie (1. Stufe)* $\mathcal{T} = (\mathcal{L}_{PL}(SIG), \mathbb{A})$ ist gegeben durch:

- eine Sprache $\mathcal{L}_{PL}(SIG)$,
- eine Menge $\mathbb{A}$ von Formeln von $\mathcal{L}_{PL}(SIG)$ *(nicht-logische Axiome)*.

Eine Struktur $\mathbb{S}$ für SIG heißt *Modell* von $\mathcal{T}$, wenn jede Formel von $\mathbb{A}$ in $\mathbb{S}$ gültig ist. $\mathcal{T}$ heißt $\mathcal{C}$-Theorie für eine Klasse $\mathcal{C}$ von Strukturen für SIG, wenn jede Struktur von $\mathcal{C}$ Modell von $\mathcal{T}$ ist.