PROSEMINAR
1. TEIL

SEMANTIK

WINTERSEMESTER 2002 / 2003
KRÖGER, RAUSCHMAYE

VERFASSER:
AHMED ABADA
3. SEMESTER INFORMATIK
E-MAIL: MONSEFABADA@GMX.DE

Inhaltsverzeichnis

Semantik Beschreibung Methoden

Es ist üblich, zwischen der Syntax und der Semantik einer Programmier Sprache zu unterscheiden.

- Syntax beschäftigt sich mit der grammatikalischen Struktur von Programmen.
- Semantik beschäftigt sich mit der Bedeutung eines (grammatikalisch korrekten) Programms.

z : = x ; x : = y ; y: = z

Operational Semantics

Individuelle Anweisungen, getrennt durch ’’ ; ’’ sind nacheinander, von links nach rechts auszuführen.

Um eine Anweisung der Form ’’ a : = b ’’ auszuführen, ermitteln wir den Wert der zweiten Variablen ’’ b’’ und ordnen ihren Wert der Variablen a (der ersten Variablen) zu.

Beispiel:

$$< z := x \ ; \ x := y \ ; \ y := z \ , \ [x \rightarrow 5, y \rightarrow 7, z \rightarrow 0] >$$

$$\Rightarrow \quad < x := y \ ; \ y := z \ , \ [x \rightarrow 5, y \rightarrow 7, z \rightarrow 5] >$$

$$\Rightarrow \quad < y := z \ , \ [x \rightarrow 7, y \rightarrow 7, z \rightarrow 5] >$$

$$\Rightarrow \quad < [x \rightarrow 7, y \rightarrow 5, z \rightarrow 5] >$$

$< z := x , S_0 > \rightarrow S_1$ $< x := y , S_1 > \rightarrow S_2$

$< z := x ; x := y, S_0 > \rightarrow S_2$ $< y := z, S_2 > \rightarrow S_3$

$< z := x ; x := y; y := z, S_0 > \rightarrow S_3$

Abkürzungen:

$S_0 = [x \rightarrow 5, y \rightarrow 7, z \rightarrow 0]$

$S_1 = [x \rightarrow 5, y \rightarrow 7, z \rightarrow 5]$

$S_2 = [x \rightarrow 7, y \rightarrow 7, z \rightarrow 5]$

$S_3 = [x \rightarrow 7, y \rightarrow 5, z \rightarrow 5]$

$< z := x ; x := y; y := z, S_0 > \rightarrow S_3$

Denotational Semantics

Die Bedeutungen werden durch mathematische Objekte modelliert, die den Effekt der Ausführung dieses Konstrukts (z. B. Prog.) wiedergeben.

Nur der Effekt ist von Interesse, nicht der Weg dorthin.

Für unser Beispielprogramm erhalten wir die Funktionen :

S[z:=x], S[x:=y], und S[y:=z] für jeden Ausdruck.

Und für das gesamte Programm :

$$\mathcal{S}[\![\mathrm{z}{:=}\mathrm{x};\ \mathrm{x}{:=}\mathrm{y};\ \mathrm{y}{:=}\mathrm{z}]\!] = \mathcal{S}[\![\mathrm{y}{:=}\mathrm{z}]\!] \circ \mathcal{S}[\![\mathrm{x}{:=}\mathrm{y}]\!] \circ \mathcal{S}[\![\mathrm{z}{:=}\mathrm{x}]\!]$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}[\![\mathrm{z}{:=}\mathrm{x};\ \mathrm{x}{:=}\mathrm{y};\ \mathrm{y}{:=}\mathrm{z}]\!]([\mathrm{x}{\mapsto}\mathbf{5},\ \mathrm{y}{\mapsto}\mathbf{7},\ \mathrm{z}{\mapsto}\mathbf{0}]) \\
&\quad = (\mathcal{S}[\![\mathrm{y}{:=}\mathrm{z}]\!] \circ \mathcal{S}[\![\mathrm{x}{:=}\mathrm{y}]\!] \circ \mathcal{S}[\![\mathrm{z}{:=}\mathrm{x}]\!])([\mathrm{x}{\mapsto}\mathbf{5},\ \mathrm{y}{\mapsto}\mathbf{7},\ \mathrm{z}{\mapsto}\mathbf{0}]) \\
&\quad = \mathcal{S}[\![\mathrm{y}{:=}\mathrm{z}]\!](\mathcal{S}[\![\mathrm{x}{:=}\mathrm{y}]\!](\mathcal{S}[\![\mathrm{z}{:=}\mathrm{x}]\!]([\mathrm{x}{\mapsto}\mathbf{5},\ \mathrm{y}{\mapsto}\mathbf{7},\ \mathrm{z}{\mapsto}\mathbf{0}]))) \\
&\quad = \mathcal{S}[\![\mathrm{y}{:=}\mathrm{z}]\!](\mathcal{S}[\![\mathrm{x}{:=}\mathrm{y}]\!]([\mathrm{x}{\mapsto}\mathbf{5},\ \mathrm{y}{\mapsto}\mathbf{7},\ \mathrm{z}{\mapsto}\mathbf{5}])) \\
&\quad = \mathcal{S}[\![\mathrm{y}{:=}\mathrm{z}]\!]([\mathrm{x}{\mapsto}\mathbf{7},\ \mathrm{y}{\mapsto}\mathbf{7},\ \mathrm{z}{\mapsto}\mathbf{5}]) \\
&\quad = [\mathrm{x}{\mapsto}\mathbf{7},\ \mathrm{y}{\mapsto}\mathbf{5},\ \mathrm{z}{\mapsto}\mathbf{5}]
\end{aligned}$$

Axiomatic Semantics

Ein Programm ist abschnittsweise korrekt (pratially correct) bezüglich einer gegebenen Vorbedingung und einer „ Nachbedingung “, wenn der Ausgangs-Zustand die Vorbedingung erfüllt und das Programm beendet wird und der Endzustand die Nachbedingung erfüllt.

- Für unser Beispielprogramm haben wir die partial correctness property
  $\{x = n \wedge y = m\}\ \ z := x\ ;\ x := y\ ;\ y := z\ \ \{y = n \wedge x = m\}$
  Vorbedingung Nachbedingung

- Axiomatische Semantik bietet ein logisches System, um Partial Correctness für einzelne Programme zu beweisen.

Beweisbaum für obiges Beispiel :

$$\frac{\dfrac{\{P_0\}\ z := x\ \{P_1\} \qquad \{P_1\}\ x := y\ \{P_2\}}{\{P_0\}\ z := x\ ;\ x := y\ \{P_2\}} \qquad \{P_2\}\ y := z\ \{P_2\}}{\{P_0\}\ z := x\ ;\ x := y\ ;\ y := z\ \{P_3\}}$$

Hier bei werden folgende Abkürzungen verwendet :

$P_0 = x = n \wedge y = m$

$P_1 = z = n \wedge y = m$

$P_2 = z = n \wedge x = m$

$P_3 = y = n \wedge x = m$

- Wir werden für jeden der Ansätze (Operational, denotational, axiomatic Semantics) eine einfache (Programm) Sprache von While - Programmen entwickeln.

Die Beispiel – Sprache WHILE

Für unsere Sprache gibt es folgende Meta-Variablen und Kategorien:

- **numerals**

  n ∈ **Num**

- **variables**

  x ∈ **VAR**

- **arithmetic expressions**

  a ∈ **Aexp** (Arithmetische Ausdrücke)

  a ::= n | x | $a_1 + a_2$ | $a_1 * a_2$ | $a_1 - a_2$

- **booleans expressins**

  b ∈ **Bexp** (bool'sche Ausdrücke)

  b ::= True | False | $a_1 = a_2$ | $a_1 \leq a_2$ | $\neg b$ | $b_1 \Lambda\ b_2$

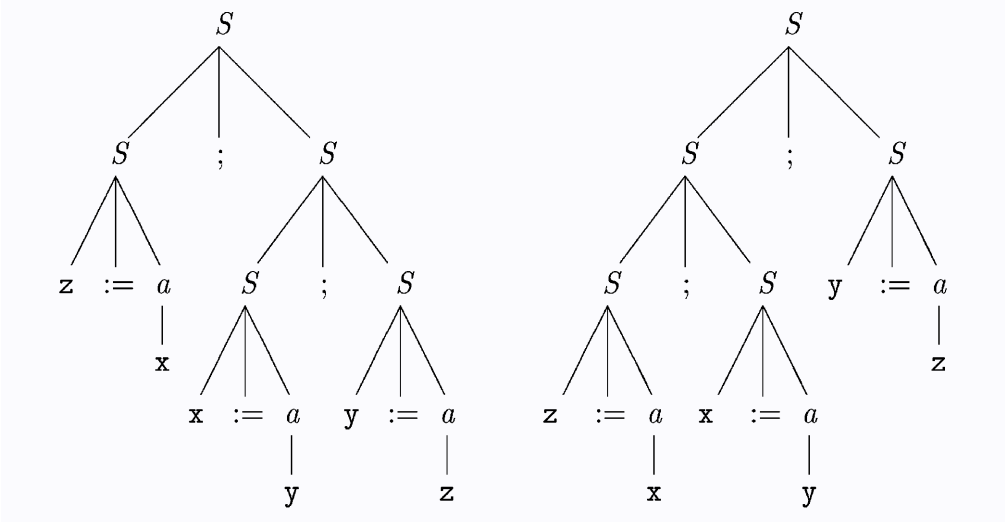
- **statements**

  S ∈ **Stm**

  S ::= x := a | Skip | S_1 ; S_2 | if b then S_1 else S_2 | While b do S

Z := x ; x := Y ; Y := z

z : = x; (x : = y ; y : = z) **(z : = x ; x : = y); y : = z**



Die Semantik von Ausdrücken

n ::= 0 | 1 | n 0 | n 1

***N* : Num ⟶ Z**

Falls n ∈ N ist, schreiben wir *N* [[n]] um *N* auf n.

Die semantische Funktion *N* wird durch die folgenden semantischen Sätze oder Gleichungen definiert :

N [[0]] = 0

N [[1]] = 1

N [[n 0]] = 2 * *N* [[n]]

N [[n 1]] = 2 * *N* [[n]] + 1

Beispiel :

N [[101]] = ?

Semantische Funktionen

- **Zustand = var → z**

X	**5**
Y	**7**
z	**0**

Oder, [x → 5, y → 7, z → 0]

- ***A*** **: Aexp → (Zustand → z)**

A**[[n]] s = *****N*** **[[n]]**

A**[[x]] s = s x**

A**[[a_1 + a_2]] s = *****A*****[[a_1]] s + *****A*****[[a_2]] s**

A**[[a_1 * a_2]] s = *****A*****[[a_1]] s * *****A*** **[[a_2]] s**

A**[[a_1 - a_2]] s = *****A*****[[a_1]] s - *****A*** **[[a_2]] s**

Beispiel :

s x = 3

A**[[x + 1]] s = *****A*****[[x]] s + *****A*****[[1]] s**

= (s x) + *****N* **[[1]]**

= 3 + 1

= 4

A**[[-a]] s = ?**

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}[\![\texttt{true}]\!]s &= \mathbf{tt} \\
\mathcal{B}[\![\texttt{false}]\!]s &= \mathbf{ff} \\
\mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!]s &= \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{if } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ \mathbf{ff} & \text{if } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![a_1 \leq a_2]\!]s &= \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{if } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ \mathbf{ff} & \text{if } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s > \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![\neg\ b]\!]s &= \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff} \\ \mathbf{ff} & \text{if } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt} \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!]s &= \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{if } \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathbf{tt} \text{ and } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = \mathbf{tt} \\ \mathbf{ff} & \text{if } \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathbf{ff} \text{ or } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = \mathbf{ff} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Eigenschaften der Semantik

Freie Variablen

FV (a) aus Var.

FV (n)	**=**	$\varnothing$
FV (x)	**=**	**{ x }**
FV ($a_1 + a_2$)	**=**	**FV (a_1) U FV (a_2)**
FV ($a_1 * a_2$)	**=**	**FV (a_1) U FV (a_2)**
FV ($a_1 - a_2$)	**=**	**FV (a_1) U FV (a_2)**

- Betrachten wir das Beispiel **FV (x + 1) = { x } und FV (x + y + x) = { x, y }**

Substitutionen (Ersetzungen)

$$
\begin{array}{lcl}
n[y \mapsto a_0] & = & n \\
x[y \mapsto a_0] & = & \begin{cases} a_0 & \text{if } x = y \\ x & \text{if } x \neq y \end{cases} \\
(a_1 + a_2)[y \mapsto a_0] & = & (a_1[y \mapsto a_0]) + (a_2[y \mapsto a_0]) \\
(a_1 \star a_2)[y \mapsto a_0] & = & (a_1[y \mapsto a_0]) \star (a_2[y \mapsto a_0]) \\
(a_1 - a_2)[y \mapsto a_0] & = & (a_1[y \mapsto a_0]) - (a_2[y \mapsto a_0])
\end{array}
$$

Beispiel :

(x+1)[y→3] = 3 + 1

(x+y * x)[x→y -5] =(y - 5) + y * (y – 5)

(s[y→v]) x =

$$
\begin{cases} v & \text{if } x = y \\ sx & \text{if } x \neq y \end{cases}
$$

Natürliche Semantika

$$[ass_{ns}] \quad \langle x := a, s \rangle \rightarrow s\,[x \mapsto \mathcal{A}[[a]]\,s]$$

$$[Skip_{ns}] \quad \langle Skip, s \rangle \rightarrow s$$

$$[Comp_{ns}] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \rightarrow s', \langle S_2, s' \rangle \rightarrow s''}{\langle S_1; S_2, s \rangle \rightarrow s''}$$

$$[if^{tt}_{ns}] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \rightarrow s'}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s \rangle \rightarrow s'} \quad \text{if } \mathcal{B}[[b]]\,s = tt$$

$$[if^{ff}_{ns}] \quad \frac{\langle S_2, s \rangle \rightarrow s'}{\langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s \rangle \rightarrow s'} \quad \text{if } \mathcal{B}[[b]]\,s = ff$$

$$[while^{tt}_{ns}] \quad \frac{\langle S, s \rangle \rightarrow s', \langle \text{while } b \text{ do } S, s' \rangle \rightarrow S''}{\langle \text{while } b \text{ do } S, s \rangle \rightarrow s''} \quad \text{if } \mathcal{B}[[b]]\,s = tt$$

$$[while^{ff}_{ns}] \quad \langle \text{while } b \text{ do } S, s' \rangle \rightarrow s \quad \text{if } \mathcal{B}[[b]]\,s = ff$$

Eigenschaften der Semantik

'' while b do S '' ist semantisch äquivalent zu '' if b then (S ; while b do S) else skip ''

- < while b do S, s >→ S'' (*)
- < if b then (S ; while b do S) else skip, s >→ S'' (**)

*weil (*) gilt →einen derivation tree T haben→[while $^{ff}_{ns}$] oder [while $^{tt}_{ns}$]*

T1 T2

< while b do S , s >→ S''

, wobei T_1 eine dervation tree mit der Wurzel< S, s >→s'
T_2 eine dervation Tree mit der Wurzel
< while b do S , s' >→ S''

T_1 und T_2 für die Regeln [$comp_{ns}$] voraussetzen :

T1 T2

<S ; while b do S , s >→ S''

wenn B[[b]]s = tt →[if $^{tt}_{ns}$]

T1 T2

<S ; while b do S , s >→ S''

< if b then (S ; while b do S , s) else skip, s > → S''

'' Das beweist, das (**) gilt .''
Alternativ ist der derivation tree T ein konkreter Fall von [While $^{ff}_{ns}$]
Wenn B[[b]]s = ff , und es muss gelten, dass s = s' ist.
Dann ist T:
< while b do S, s > → s [$skip_{ns}$] dann < skip , s > → s'' [if $^{ff}_{ns}$] dann < skip, s >→ s''

(* *) gilt → derivation tree T→[if $^{tt}_{ns}$] oder [if $^{ff}_{ns}$]
wenn B [[b]] s = tt → T_1 mit der Wurzel < S ; while b do S , s >→ s''
< S_1 ; S_2 , s >→ s''

[comp $_{ns}$] → (T_2 < S, s > → s' und T_3 < while b do S, s'> → s'')
jetzt kann man einfach [while $^{tt}_{ns}$] benützen, um T_2 und T_3 zu einem der derivation Tree für (*) zu kombinieren .

Im zweiten Fall: B[[b]] s = ff , und T wird mit [if $^{ff}_{ns}$] konstruiert.
< skip , s >→ s'' mit dem Axiom [skip $_{ns}$] müss gelten, dass s = s'ist → [while ^{ff}ns] → (*)

Strukturelle operationelle Semantik

$[ass_{sos}]$ $\quad \langle x := a, s \rangle \rightarrow s[x \rightarrow A[[a]]s]$

$[Skip_{sos}]$ $\quad \langle Skip, s \rangle \rightarrow s$

$$[comp^1_{sos}] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow \langle S'_1, s' \rangle}{\langle S_1; S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S'_1; S_2, s' \rangle}$$

$$[comp^2_{sos}] \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_2, s' \rangle}$$

$[if^{tt}_{sos}]$ $\quad \langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_1, s \rangle$ if $B[[b]]s = tt$

$[if^{ff}_{sos}]$ $\quad \langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_2, s \rangle$ if $B[[b]]s = ff$

$[while_{sos}]$ $\quad \langle \text{while } b \text{ do } S, s \rangle \Rightarrow$

$\langle \text{if } b \text{ then } (S; \text{while } b \text{ do } S, s') \text{ else skip}, s \rangle$

Beispiel 1:

(z := x; x := y); y := z

s_0 x = 5 und s_0 y=7 . Dann erhalten wir die Herleitungsfolge:

$$\begin{aligned}&\langle (\mathtt{z} := \mathtt{x};\ \mathtt{x} := \mathtt{y});\ \mathtt{y} := \mathtt{z},\ s_0\rangle\\ &\quad\Rightarrow \langle \mathtt{x} := \mathtt{y};\ \mathtt{y} := \mathtt{z},\ s_0[\mathtt{z}\mapsto\mathbf{5}]\rangle\\ &\quad\Rightarrow \langle \mathtt{y} := \mathtt{z},\ (s_0[\mathtt{z}\mapsto\mathbf{5}])[\mathtt{x}\mapsto\mathbf{7}]\rangle\\ &\quad\Rightarrow ((s_0[\mathtt{z}\mapsto\mathbf{5}])[\mathtt{x}\mapsto\mathbf{7}])[\mathtt{y}\mapsto\mathbf{5}]\end{aligned}$$

$$\langle (\mathtt{z} := \mathtt{x};\ \mathtt{x} := \mathtt{y});\ \mathtt{y} := \mathtt{z},\ s_0\rangle \Rightarrow \langle \mathtt{x} := \mathtt{y};\ \mathtt{y} := \mathtt{z},\ s_0[\mathtt{z}\mapsto\mathbf{5}]\rangle$$

Der Herleitungsbaum ist konstruiert aus dem Grundsatz [ass $_{sos}$] und den Regeln [comp $^{1}_{sos}$] und [Comp $^{2}_{sos}$].

$$\dfrac{\dfrac{\langle \mathtt{z} := \mathtt{x},\ s_0\rangle \Rightarrow s_0[\mathtt{z}\mapsto\mathbf{5}]}{\langle \mathtt{z} := \mathtt{x};\ \mathtt{x} := \mathtt{y},\ s_0\rangle \Rightarrow \langle \mathtt{x} := \mathtt{y},\ s_0[\mathtt{z}\mapsto\mathbf{5}]\rangle}}{\langle (\mathtt{z} := \mathtt{x};\ \mathtt{x} := \mathtt{y});\ \mathtt{y} := \mathtt{z},\ s_0\rangle \Rightarrow \langle \mathtt{x} := \mathtt{y};\ \mathtt{y} := \mathtt{z},\ s_0[\mathtt{z}\mapsto\mathbf{5}]\rangle}$$

Der Herleitungsbaum für den zweiten Schritt ist ähnlich konstruiert und benutzt nur [ass $_{sos}$] und [comp $^{2}_{sos}$] und der dritte Schritt ist einfach eine Instanz von [ass $_{sos}$].

Beispiel 2:

Nehmen wir an, dass s x = 3 ist.

$$\langle \mathtt{y{:=}1};\ \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x{=}1})\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y{:=}y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x{:=}x{-}1}),\ s\rangle$$

$$\langle \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x{=}1})\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y{:=}y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x{:=}x{-}1}),\ s[\mathtt{y}\mapsto\mathbf{1}]\rangle$$

dieses wird mit dem Grundsatz [ass $_{sos}$] und der Regel [comp$^2_{sos}$] erzielt und im Herleitungbaum aufgezeigt:

$$\frac{\langle \mathtt{y{:=}1},\ s\rangle \Rightarrow s[\mathtt{y}\mapsto\mathbf{1}]}{\begin{array}{l}\langle \mathtt{y{:=}1};\ \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x{=}1})\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y{:=}y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x{:=}x{-}1}),\ s\rangle \Rightarrow \\ \quad \langle \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x{=}1})\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y{:=}y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x{:=}x{-}1}),\ s[\mathtt{y}\mapsto\mathbf{1}]\rangle\end{array}}$$

Der nächste Schritt der Ausführung wird die Schleife neu schreiben mit der bedingten Benutzung des Grundsatzes [while $_{sos}$] mit der wir die Konfiguration bekommen

$$\begin{array}{l}\langle \mathtt{if}\ \neg(\mathtt{x{=}1})\ \mathtt{then}\ ((\mathtt{y{:=}y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x{:=}x{-}1});\\ \qquad\qquad\qquad \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x{=}1})\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y{:=}y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x{:=}x{-}1}))\\ \qquad\quad \mathtt{else\ skip},\ s[\mathtt{y}\mapsto\mathbf{1}]\rangle\end{array}$$

Der folgende Schritt wird den Test ausführen und ergibt (gemäß [if $^{tt}_{sos}$]) die Konfiguration

$$\langle(\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1);\ \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x}{=}1)\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1),\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{1}]\rangle$$

Wir können dann [ass $_{sos}$], [comp $^{2}_{sos}$] benutzen und [comp $^{1}_{sos}$] bekommen die Konfiguration

$$\langle\mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1;\ \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x}{=}1)\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1),\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{3}]\rangle$$

wie es durch den Herleitungsbaum bestätigt wird:

$$\dfrac{\dfrac{\langle\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x},\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{1}]\rangle\Rightarrow s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{3}]}{\langle\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1,\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{1}]\rangle\Rightarrow\langle\mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1,\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{3}]\rangle}}{\begin{array}{c}\langle(\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1);\ \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x}{=}1)\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1),\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{1}]\rangle\ \Rightarrow\\ \langle\mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1;\ \mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x}{=}1)\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1),\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{3}]\rangle\end{array}}$$

mit [ass $_{sos}$] und [comp $^{2}_{sos}$] erhalten wir die nächste Konfiguration

$$\langle\mathtt{while}\ \neg(\mathtt{x}{=}1)\ \mathtt{do}\ (\mathtt{y}{:=}\mathtt{y}\star\mathtt{x};\ \mathtt{x}{:=}\mathtt{x}{-}1),\ s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{3}][\mathtt{x}{\mapsto}\mathbf{2}]\rangle$$

nachfolgend erhalten die Konfiguration den abschließenden Status $s[\mathtt{y}{\mapsto}\mathbf{6}][\mathtt{x}{\mapsto}\mathbf{1}]$.