

Formale Techniken der Software-Entwicklung
Übungsblatt 1
Besprechung am 11.04.2014

Musterlösung

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien sind.

- (a) $A \implies (B \implies (A \wedge B))$
- (b) $(A \implies B) \implies ((A \implies \neg B) \implies \neg A)$

Lösung:

Siehe Wahrheitstabellen.ods.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln **keine** Tautologien sind. Sind sie erfüllbar? Falls ja, geben Sie jeweils eine Belegung an, die die Formel erfüllt.

- (a) $(A \implies C) \implies ((B \implies D) \implies ((A \vee B) \implies C))$
- (b) $(A \implies B) \implies ((B \implies \neg C) \implies \neg A)$

Lösung:

Siehe Wahrheitstabellen.ods.

Aufgabe 3:

Geben Sie für die beiden aussagenlogische Tautologien aus Aufgabe 1 Beweisbäume im in der Vorlesung vorgestellten Beweissystem an.

Lösung:

a)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{A, B \vdash A} \quad \overline{A, B \vdash B}}{\overline{A, B \vdash A \wedge B}} (\vdash \wedge) \\
 \frac{\overline{A, B \vdash A \wedge B}}{A \vdash B \implies (A \wedge B)} (\vdash \implies) \\
 \frac{A \vdash B \implies (A \wedge B)}{\vdash A \implies (B \implies (A \wedge B))} (\vdash \implies)
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c}
 (\neg \vdash) \frac{\overline{B \vdash B, \neg A}}{B, \neg B \vdash \neg A} \quad \frac{\overline{B, A \vdash A}}{B \vdash A, \neg A} (\vdash \neg) \quad (\vdash \neg) \frac{\overline{\neg B, A \vdash A}}{\neg B \vdash A, \neg A} \quad \frac{\overline{A \vdash A, A}}{\vdash A, A, \neg A} (\vdash \neg) \\
 (\implies \vdash) \frac{\overline{B, (A \implies \neg B) \vdash \neg A}}{B, (A \implies \neg B) \vdash \neg A} \quad \frac{\overline{(A \implies \neg B) \vdash A, \neg A}}{(A \implies \neg B) \vdash A, \neg A} (\implies \vdash) \\
 \frac{\overline{(A \implies B), (A \implies \neg B) \vdash \neg A}}{A \implies B \vdash (A \implies \neg B) \implies \neg A} (\vdash \implies) \\
 \frac{A \implies B \vdash (A \implies \neg B) \implies \neg A}{\vdash (A \implies B) \implies ((A \implies \neg B) \implies \neg A)} (\vdash \implies)
 \end{array}$$

Aufgabe 4:

Geben Sie einen Ableitungsbaum für die Aussage in Aufgabe 2 a) an. Wenden Sie dabei die besprochenen Regeln so lange an, bis in jedem Blatt ein Axiom steht, oder bis keine Regel außer der Strukturregel mehr anwendbar ist. Dann sollte in genau einem Blatt eine Sequenz stehen, die kein Axiom ist. Leiten Sie daraus ein Gegenbeispiel für die Gesamtaussage 2 a) ab, d.h. eine Belegung, bei der die Aussage nicht erfüllt wird.

Lösung:

Der Ableitungsbaum befindet sich auf der nächsten Seite.

$$\begin{array}{l}
 \neg(D, B \vdash A, C) \equiv \\
 \equiv \\
 \equiv \\
 \equiv
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \neg((D \wedge B) \implies (A \vee C)) \\
 \neg(\neg(D \wedge B) \vee (A \vee C)) \\
 \neg(\neg D \vee \neg B \vee A \vee C) \\
 D \wedge B \wedge \neg A \wedge \neg C
 \end{array}$$

Das Gegenbeispiel ist also die Belegung

$$\begin{array}{ll}
 \eta(A) = & \text{false} \\
 \eta(B) = & \text{true} \\
 \eta(C) = & \text{false} \\
 \eta(D) = & \text{true}
 \end{array}$$

Dies ist auch die einzige Belegung, die in der Wahrheitstabelle von Aufgabe 2 a) die Gesamtaussage **false** macht.

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash B, A, C}{(A \vee B) \vdash B, A, C} \\
 \frac{\frac{B \vdash B, A, C}{(A \vee B) \vdash B, A, C} (\vee \vdash) \quad \frac{D, A \vdash A, C}{D, (A \vee B) \vdash A, C} (\Rightarrow \vdash)}{(B \Rightarrow D), (A \vee B) \vdash A, C} (\Rightarrow \vdash)}{\frac{\frac{(A \Rightarrow C), (B \Rightarrow D), (A \vee B) \vdash C}{(A \Rightarrow C), (B \Rightarrow D) \vdash (A \vee B) \Rightarrow C} (\vdash \Rightarrow)}{(A \Rightarrow C) \vdash (B \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)} (\vdash \Rightarrow)}{\vdash (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))} (\vdash \Rightarrow)} \\
 \frac{\frac{D, A \vdash A, C}{D, (A \vee B) \vdash A, C} (\Rightarrow \vdash) \quad \frac{D, B \vdash A, C}{D, (A \vee B) \vdash A, C} (\Rightarrow \vdash)}{(B \Rightarrow D), (A \vee B) \vdash A, C} (\Rightarrow \vdash)}{\frac{C, (B \Rightarrow D), (A \vee B) \vdash C}{(A \Rightarrow C), (B \Rightarrow D) \vdash (A \vee B) \Rightarrow C} (\vdash \Rightarrow)} (\Rightarrow \vdash)}
 \end{array}$$

Abbildung 1: Ableitungsbaum zu Aufgabe 4