Ludwig-Maximilians-Universität München **SoSe 2014**
Institut für Informatik
Dr. M. Hölzl, C. Kroiß

Formale Techniken der Software-Entwicklung
Übungsblatt 6
Besprechung am 06.06.2014

Musterlösung

Die Aufgaben auf diesen Übungsblatt stammen aus dem sehr empfehlenswerten Lehrbuch [1].

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende prädikatenlogische Formel:

$$F \equiv \neg\exists x.(\forall y.P(x,y) \vee \exists z.Q(z,y)) \vee \exists x.P(x,g(x,a)).$$

(a) Bringen Sie die Formel F in Skolem-Normalform.

Lösung:

$$\begin{aligned}
F &\equiv \neg\exists x.(\forall y.P(x,y) \vee \exists z.Q(z,y)) \vee \exists x.P(x,g(x,a)) \\
&\equiv \forall x.(\neg\forall y.P(x,y) \vee \exists z.Q(z,y)) \vee \exists x.P(x,g(x,a)) \\
&\equiv \forall x.(\exists y.\neg(P(x,y) \vee \exists z.Q(z,y))) \vee \exists x.P(x,g(x,a)) \\
&\equiv \forall x.(\exists y.(\neg P(x,y) \wedge \forall z.\neg Q(z,y))) \vee \exists x.P(x,g(x,a)) \\
&\equiv \forall x.\exists y.\forall z.(\neg P(x,y) \wedge \neg Q(z,y)) \vee \exists u.P(u,g(u,a)) \\
&\equiv \forall x.\exists y.\forall z.\exists u.(\neg P(x,y) \wedge \neg Q(z,y)) \vee P(u,g(u,a)) \\
&\equiv \forall x.\exists y.\forall z.\exists u.(\neg P(x,y) \vee P(u,g(u,a))) \wedge (\neg Q(z,y) \vee P(u,g(u,a))) \\
SNF(F) &= \forall x.\forall z.(\neg P(x,h(x)) \vee P(k(x,z),g(k(x,z),a))) \wedge \\
&\qquad (\neg Q(z,h(x)) \vee P(k(x,z),g(k(x,z),a)))
\end{aligned}$$

(b) Geben Sie für die Formel F die ersten 15 Terme des Herbrand-Universums sowie die ersten sechs Formeln aus der Herbrand-Basis an.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
S &= \{\neg P(x, h(x)) \vee P(k(x,z), g(k(x,z),a)), \neg Q(z, h(x)) \vee P(k(x,z), g(k(x,z),a))\} \\
H_0 &= \{a\} \\
H_1 &= \{a, h(a), g(a,a), k(a,a)\} \\
H_2 &= H_1 \cup \{h(h(a)), h(g(a,a)), h(k(a,a)), g(h(a),a), g(g(a,a),a), g(k(a,a),a), \\
&\quad g(a,h(a)), g(h(a),h(a)), g(g(a,a),h(a)), g(k(a,a),h(a)), \\
&\quad g(a, g(a,a)), \ldots\} \\
B &= \{P(a,a), Q(a,a), P(h(a),a), Q(h(a),a), P(g(a,a),a), Q(g(a,a),a), \ldots\}
\end{aligned}
$$

(c) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{A}$ mit der Trägermenge $A = \{1, 2\}$ an, für die $\mathcal{A} \models F$ gilt.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
a^{\mathcal{A}} &= 1 & & \\
h^{\mathcal{A}}(x) &= 1 & & \forall x \in A \\
g^{\mathcal{A}}(x,y) &= 1 & & \forall x, y \in A \\
k^{\mathcal{A}}(x,y) &= 1 & & \forall x, y \in A \\
P^{\mathcal{A}} &= A \times A & & \\
Q^{\mathcal{A}} &= \emptyset & &
\end{aligned}
$$

(d) Geben Sie eine zu $\mathcal{A}$ zugeordnete Herbrand-Struktur (H-Struktur) A^* an.

Lösung:

$$A^* = \{P(a,a), \neg Q(a,a), P(h(a),a), \neg Q(h(a),a), P(g(a,a),a), \neg Q(g(a,a),a), \ldots\}$$

Aufgabe 2:

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die Literalmenge

$$\mathscr{L} = \{P(f(x), w, f(a)), P(f(w), w, f(z)), P(f(g(z)), x, y)\}$$

an.

Lösung:

$$\begin{array}{rll}
 & P(f(x), w, f(a)) \leftrightarrow P(f(w), w, f(z)) & \{\} \\
P = P \Rightarrow & [f(x), w, f(a)] \leftrightarrow [f(w), w, f(z)] & \{\} \\
List(1) \Rightarrow & f(x) \leftrightarrow f(w) =_{var} \top & \{\} \\
List(2) \Rightarrow & w \leftrightarrow w = \top(var) & \{\} \\
List(3) \Rightarrow & f(a) \leftrightarrow f(z) = \top(var) & \{z \leftarrow a\} \\
 & P(f(x), w, f(a)) \leftrightarrow P(f(g(z)), x, y) & \{z \leftarrow a\} \\
P = P \Rightarrow & [f(x), w, f(a)] \leftrightarrow [f(g(z)), x, y] & \{z \leftarrow a\} \\
List(1) \Rightarrow & f(x) \leftrightarrow f(g(z)) & \{z \leftarrow a\} \\
f = f \Rightarrow & x \leftrightarrow g(z) =_{var} g(a) & \{z \leftarrow a, x \leftarrow g(a)\} \\
List(2) \Rightarrow & w \leftrightarrow x =_{var} g(a) & \{z \leftarrow a, x \leftarrow g(a), w \leftarrow g(a)\} \\
List(3) \Rightarrow & f(a) \leftrightarrow y =_{var} \top & \{z \leftarrow a, x \leftarrow g(a), w \leftarrow g(a), y \leftarrow f(a)\}
\end{array}$$

Somit ist das unifizierte Literal:

$$P(f(g(a)), g(a), f(a))$$

Aufgabe 3:

Auf seiner Reise durch Transsylvanien findet Inspektor Craig Folgendes über die Bewohner heraus:

1) Ein Bewohner Transsylvaniens ist wahnsinnig, wenn alle seine Kinder Vampire sind.
2) Alle Mondsüchtigen sind Vampire.
3) Ist ein Bewohner Transsylvaniens nicht mondsüchtig, so auch keiner seiner Elternteile.

(a) Drücken Sie obige Tatsachen als prädikatenlogische Formeln aus.

Lösung:
Wir verwenden dir folgenden Prädikate:

$W(x)$: x ist wahnsinnig.
$M(x)$: x ist mondsüchtig.
$V(x)$: x ist ein Vampir.
$E(x, y)$: x ist ein Elternteil von y.

$$\Phi_1 = \forall x.(\forall y.E(x, y) \to V(y)) \to W(x)$$
$$\Phi_2 = \forall x.M(x) \to V(x)$$
$$\Phi_3 = \forall x.\neg M(x) \to (\forall y.E(y, x) \to \neg M(y))$$

(b) Folgern Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass alle Mondsüchtigen wahnsinnig sind.

Lösung:
Anfrage:

$$F = \forall x.M(x) \to W(x)$$

Zunächst werden alle Formeln in Skolem-Normalform umgewandelt.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \forall x.(\forall y.E(x,y) \to V(y)) \to W(x)\\
&\equiv \forall x.\neg(\forall y.\neg E(x,y) \lor V(y)) \lor W(x)\\
&\equiv \forall x.(\exists y.\neg(\neg E(x,y) \lor V(y))) \lor W(x)\\
&\equiv \forall x.(\exists y.E(x,y) \land \neg V(y)) \lor W(x)\\
&\equiv \forall x.\exists y.(E(x,y) \land \neg V(y)) \lor W(x)\\
&\equiv \forall x.\exists y.(E(x,y) \lor W(x)) \land (\neg V(y) \lor W(x))\\
SNF(\Phi_1) &= \forall x.(E(x,f(x)) \lor W(x)) \land (\neg V(f(x)) \lor W(x))\\
&= \{\{E(x,f(x)), W(x)\}, \{\neg V(f(x)), W(x)\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \forall x.M(x) \to V(x)\\
&\equiv \forall x.\neg M(x) \lor V(x)\\
SNF(\Phi_2) &= \{\{\neg M(x), V(x)\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \forall x.\neg M(x) \to (\forall y.E(y,x) \to \neg M(y))\\
&\equiv \forall x.M(x) \lor (\forall y.\neg E(y,x) \lor \neg M(y))\\
&\equiv \forall x.\forall y.M(x) \lor \neg E(y,x) \lor \neg M(y)\\
SNF(\Phi_3) &= \{\{M(x), \neg E(y,x), \neg M(y)\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg F &= \neg(\forall x.M(x) \to W(x))\\
&\equiv \neg(\forall x.\neg M(x) \lor W(x))\\
&\equiv \exists x.\neg(\neg M(x) \lor W(x))\\
&\equiv \exists x.M(x) \land \neg W(x)\\
SNF(\neg F) &= M(c) \land \neg W(c)\\
&= \{M(c), \neg W(c)\}
\end{aligned}$$

Ein Resolutionsbeweis ist in Abbildung 1 auf Seite 5 angegeben.

Literatur

[1] Martin Kreuzer and Stefan Kühling. *Logik für Informatiker.* Pearson Studium, 2006.

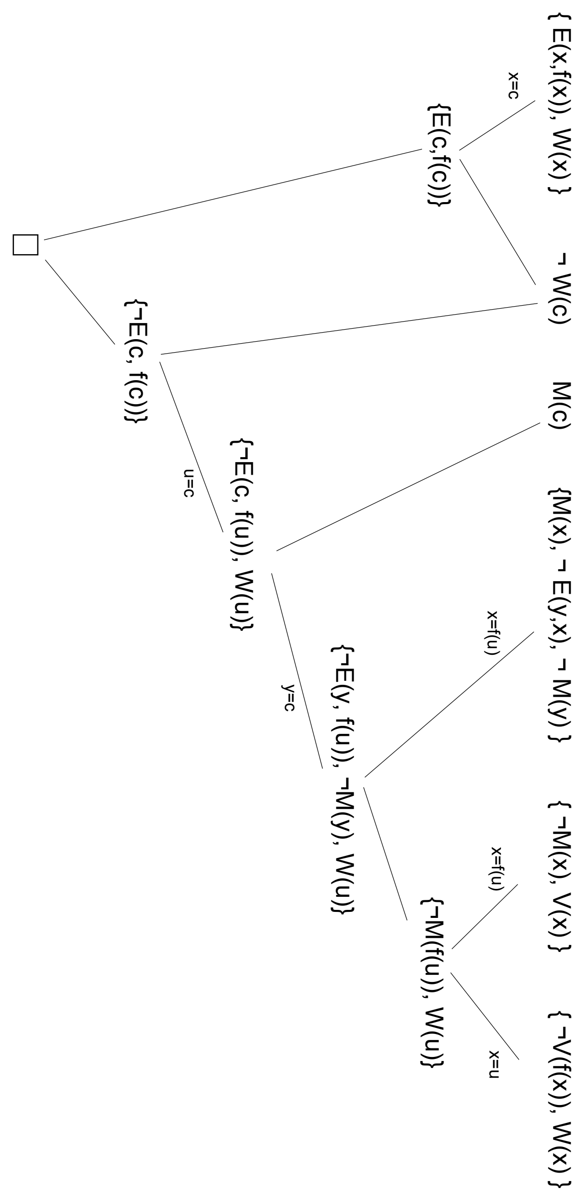

Abbildung 1: Resolutionsbeweis zu Aufgabe 2