

Formale Techniken der Software-Entwicklung

Übung 3 - 02.05.2014

Christian Kroiß

5. Mai 2014

Knoten-Färbung eines Graphen als SAT-Problem

Schema:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ und der Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_M\}$. Sei ferner $C = \{c_1, \dots, c_K\}$ die Menge an *Farben*, mit denen die Knoten gefärbt werden sollen.

Für alle $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq j \leq k$ bezeichne $C_{i,j}$ die Aussage, dass der Knoten v_i mit der Farbe c_j gefärbt wird.

Knoten-Färbung eines Graphen als SAT-Problem (2)

Es ergeben sich folgende Constraints:

1. Jeder Knoten muss **genau eine** Farbe haben.

1.1 Jeder Knoten muss mindestens eine Farbe haben:

$$\bigwedge_{i \in [1, N]} (C_{i,1} \vee \dots \vee C_{i,K})$$

1.2 Kein Knoten darf mehr als eine Farbe haben:

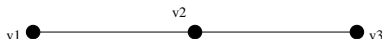
$$\bigwedge_{i \in [1, N]} \bigwedge_{k, l \in [1, K], k \neq l} \neg (C_{i,k} \wedge C_{i,l})$$

2. Benachbarte Knoten dürfen nicht die gleiche Farbe haben.

$$\bigwedge_{i \in [1, N]} \bigwedge_{j \in [1, N], \{i, j\} \in E} \bigwedge_{k \in [1, K]} \neg (C_{i,k} \wedge C_{j,k})$$

Aufgabe 2 b)

Gegeben sei der folgende ungerichtete Graph G :



Aufgabe: Erstelle CNF-Formel, die eine gültige Kantenfärbung von G mit 2 Farben (z.B. Rot und Blau) modelliert.

$$\begin{aligned}\Phi \equiv & (C_{1,1} \vee C_{1,2}) \wedge (C_{2,1} \vee C_{2,2}) \wedge (C_{3,1} \vee C_{3,2}) \wedge \\ & \neg(C_{1,1} \wedge C_{1,2}) \wedge \neg(C_{2,1} \wedge C_{2,2}) \wedge \neg(C_{3,1} \wedge C_{3,2}) \wedge \\ & \neg(C_{1,1} \wedge C_{2,1}) \wedge \neg(C_{1,2} \wedge C_{2,2}) \wedge \\ & \neg(C_{2,1} \wedge C_{3,1}) \wedge \neg(C_{2,2} \wedge C_{3,2})\end{aligned}$$

Aufgabe 2 b) (2)

$$\begin{aligned} \text{CNF}(\Phi) &\equiv (C_{1,1} \vee C_{1,2}) \wedge (C_{2,1} \vee C_{2,2}) \wedge (C_{3,1} \vee C_{3,2}) \\ &\quad (\neg C_{1,1} \vee \neg C_{1,2}) \wedge (\neg C_{2,1} \vee \neg C_{2,2}) \wedge (\neg C_{3,1} \vee \neg C_{3,2}) \wedge \\ &\quad (\neg C_{1,1} \vee \neg C_{2,1}) \wedge (\neg C_{1,2} \vee \neg C_{2,2}) \wedge \\ &\quad (\neg C_{2,1} \vee \neg C_{3,1}) \wedge (\neg C_{2,2} \vee \neg C_{3,2}) \end{aligned}$$