Ludwig-Maximilians-Universität München **SoSe 2015**
Institut für Informatik
Dr. M. Hölzl, C. Kroiß

Formale Techniken der Software-Entwicklung
Übungsblatt 5
Besprechung am 05.06.2015

Musterlösung

Aufgabe 1 wurde aus [1] übernommen und sind daher auf Englisch.

Aufgabe 1:

Let $F(x, y)$ mean that x is the father of y; $M(x, y)$ denotes x is the mother of y. Similarly, $H(x, y)$, $S(x, y)$, and $B(x, y)$ say that x is the husband/sister/brother of y, respectively. You may also use constants to denote individuals, like 'Ed' and 'Patsy.' However, you are not allowed to use any predicate symbols other than the above to translate the following sentences into predicate logic:

(a) Everybody has a mother.

> **Lösung:**
> $\forall x.\exists y.M(y, x)$

(b) Everybody has a father and a mother.

> **Lösung:**
> $\forall x.\exists y.\exists z.M(y, x) \wedge F(z, x)$

(c) Whoever has a mother has a father.

> **Lösung:**
> $\forall x.(\exists y.M(y, x)) \rightarrow (\exists z.F(z, x))$

(d) Ed is a grandfather.

> **Lösung:**
> $\exists x.\exists y.F(Ed, x) \wedge (F(x, y) \vee M(x, y))$

(e) All fathers are parents.

Lösung:
$\forall x.(\exists y.F(x,y)) \rightarrow (\exists z.F(x,z) \vee M(x,z))$

(f) All husbands are spouses.

Lösung:
Da es kein Prädikat für “wife” gibt, ist irgendwie nicht klar, wie man “spouse” anders als durch die “husband”-Beziehung ausdrücken soll. Man könnte hier noch Monogamie fordern:
$\forall x.\forall y.H(x,y) \rightarrow (\forall z.H(z,y) \rightarrow z = x)$

(g) No uncle is an aunt.

Lösung:
$$\forall x.(\exists y.\exists z.B(x,y) \wedge (M(y,z) \vee F(y,z))) \rightarrow \neg(\exists y.\exists z.S(x,y) \wedge (M(y,z) \vee F(y,z)))$$

(h) All brothers are siblings.

Lösung:
$\forall x.\forall y.B(x,y) \rightarrow (B(y,x) \vee S(y,x))$

(i) Nobody's grandmother is anybody's father.

Lösung:
$\forall x.(\exists y.\exists z.M(x,y) \wedge (M(y,z) \vee F(y,z))) \implies \neg(\exists y.F(x,y))$

(j) Ed and Patsy are husband and wife.

Lösung:
Wie oben kann man hier Monogamie fordern:
$H(Ed, Patsy) \wedge (\forall x.H(Ed,x) \rightarrow x = Patsy) \wedge (\forall y.H(y, Patsy) \rightarrow y = Ed)$

(k) Carl is Monique's brother-in-law.

Lösung:
$(\exists x.B(Carl,x) \wedge H(x, Monique)) \vee (\exists y.H(Carl,y) \wedge S(Monique,y))$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Formel $\Phi \stackrel{def}{=} \forall x \forall y.Q(g(x,y), g(y,y), z)$. Finden Sie zwei Modelle $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ so dass $\mathcal{M} \models \Phi$ aber $\mathcal{M}' \not\models \Phi$ gilt.

Lösung:
Hier gibt es natürlich unendlich viele verschiedene Möglichkeiten. Eine ganz triviale folgt:

Gegeben eine Struktur $\mathcal{A}$ mit Trägermenge $\mathbb{N}$ und

$$g^{\mathcal{A}}(x,y) = 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$
$$Q^{\mathcal{A}} = \{(1,1,1)\}$$

.

Dann wähle für $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w)$:

$$w(z) = 1$$

und für $\mathcal{M}' = (\mathcal{A}, w')$:

$$w(z) = 0$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{M} \models \Phi$ aber $\mathcal{M}' \not\models \Phi$ gilt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei der folgende Satz:

$$\Phi \stackrel{def}{=} \forall x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge (P(x,z) \rightarrow P(z,x)))$$

Welche der folgenden Modelle erfüllen Φ?

(a) Das Modell $\mathcal{M}$ besteht aus den natürlichen Zahlen mit $P^{\mathcal{M}} \stackrel{def}{=} \{(m,n) | m < n\}$.

Lösung:
Gilt.
Wähle $y > x$ und $z = x$. Dann gilt $\neg P(x,z)$ und somit ist Φ wahr.

(b) Das Modell $\mathcal{M}'$ besteht aus den natürlichen Zahlen mit $P^{\mathcal{M}'} \stackrel{def}{=} \{(m, 2*m) | m \in \mathbb{N}\}$.

Lösung:
Gilt.
Wähle $y = 2*x$ und $z = x$. Wenn man 0 zu den natürlichen Zahlen rechnet, dann gilt im Fall $x = 0$ auch $P(x,z) = P(0,0) = (0, 2*0) \in P^{\mathcal{M}}$ und genauso auch $P(z,x)$. Somit gilt die Implikation in der Klammer. Für alle anderen Fälle $x > 0$ ist bei $z = x$ die Prämisse der Implikation falsch und somit die Implikation in der Klammer wahr.

(c) Das Modell $\mathcal{M}''$ besteht aus den natürlichen Zahlen mit $P^{\mathcal{M}''} \stackrel{def}{=} \{(m,n) | m < n+1\}$.

Lösung:
Gilt.
Wähle $z = x$ und $y \geq x$. Dann gilt $P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge P(x,z) \wedge P(z,x)$ und somit ist Φ wahr.

Literatur

[1] Michael Huth and Mark Ryan. *Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems.* Cambridge University Press, 2004.