Ludwig-Maximilians-Universität München **SoSe 2015**
Institut für Informatik
Dr. M. Hölzl, C. Kroiß

Formale Techniken der Software-Entwicklung
Übungsblatt 8
Besprechung am 26.06.2015

Musterlösung

Aufgabe 1:
Gegeben sei ein gerichteter Graph wie in Abbildung 1.

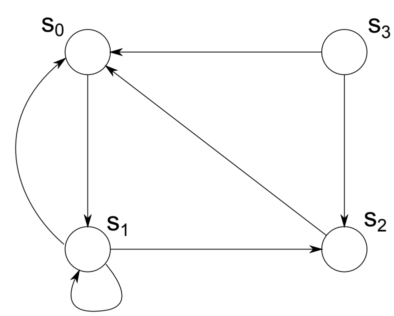

Abbildung 1: Gerichteter Graph

Im logischen Modell $\mathcal{M}$, dass im folgenden betrachtet werden soll, enthalte die Menge A die Knoten des Graphen und die binäre Relation $R(x, y)$ stehe für eine gerichtete Kante vom Knoten x zu Knoten y. Für das Modell in Abbildung 1 gilt demnach:

$$A = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$$

und

$$R^{\mathcal{M}} = \{(s_0, s_1), (s_1, s_0), (s_1, s_1), (s_1, s_2), (s_2, s_0), (s_3, s_0), (s_3, s_2)\}$$

(a) Geben Sie eine Formel Φ in der Prädikatenlogik 2. Stufe an, die beschreibt, dass ein Knoten v **nicht** von einem Knoten u erreichbar ist. Führen Sie dazu zusätzlich zu R noch ein weiteres zweistelliges Prädikat P ein. Für ein Modell $\mathcal{M}$ soll demnach $\mathcal{M} \models \Phi$ genau dann gelten, wenn es in $R^{\mathcal{M}}$ **keinen** endlichen Pfad von u nach v gibt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Phi &\equiv \exists P \forall x \forall y \forall z.\, (C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4)\\
C_1 &\equiv P(x,x)\\
C_2 &\equiv P(x,y) \wedge P(y,z) \implies P(x,z)\\
C_3 &\equiv \neg P(u,v)\\
C_4 &\equiv R(x,y) \implies P(x,y)
\end{aligned}$$

Beweis: Zeige $\exists P \forall x \forall y \forall z.\, (C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4) \iff$ es existiert kein Pfad von u nach v.

$\Longleftarrow$: definiere $P^{\mathcal{M}} = \{(s,s') \in A \times A \mid s' \neq v\} \cup \{(v,v)\}$. Man kann leicht nachprüfen, dass dieses P alle $C_1 - C_4$ erfüllt.

$\Longrightarrow$: Zeige Negation: $\exists$ Pfad von u nach $v \implies \nexists P (\forall x \forall y \forall z.\, (C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4))$.

Beweis durch Induktion über Länge n des Pfades von u nach v.

$n = 1$: Für einen Pfad der Länge 1 muss $R(u,v)$ gelten. Dann gilt durch C_4 auch $P(u,v)$ dies widerspricht jedoch C_3.

$n{+}1$: Sei w der Knoten, der auf dem Pfad von u nach v direkt nach u kommt, d.h. der Pfad hat die Form $u \to w \to \ldots \to v$. Das bedeutet, dass ein Pfad der Länge n von u nach v existiert. Sei jetzt angenommen, dass ein P existiert, das $(C_1 \wedge C_2 \wedge C_4 \wedge \neg P(u,v))$ erfüllt. Nach Induktionsvoraussetzung kann es jedoch kein P geben, dass $(C_1 \wedge C_2 \wedge C_4 \wedge \neg P(w,v))$ erfüllt. Da bis auf C_1, C_2 und C_4 unabhängig von den konkreten Knoten sind, müssen sie in jedem Fall gelten. Das bedeutet, dass für P gleichzeitig $\neg P(u,v)$ und $\neg\neg P(w,v) \equiv P(w,v)$ gelten muss. Da $u \to w$ allerdings ein Teil des Pfades ist, muss $R(u,w)$ gelten und somit durch C_4 auch $P(u,w)$. Mit C_2 würde daraus $P(u,v)$ folgen, was C_3 widerspricht. Es kann also auch für einen Pfad mit Länge $n+1$ kein P geben, dass alle $C_1 - C_4$ erfüllt.

(b) Geben Sie eine Formel Ψ in der Prädikatenlogik 2. Stufe an, für die $\mathcal{M} \models \Psi$ genau dann gilt, wenn $R^{\mathcal{M}}$ einen *Hamiltonpfad* enthält, d.h. einen Pfad, der jeden Knoten genau einmal "besucht".

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Psi \equiv \exists u \exists W \forall P.\, (&TransHull(R,P) \to (\forall x \forall y. W(x,y) \to P(x,y))) \wedge\\
&(\forall x \forall y. W(x,y) \wedge x \neq y \to \neg W(y,x)) \wedge\\
&(\forall v \in A.\, W(u,v))
\end{aligned}$$

$$TransHull(P,V) \equiv \forall x \forall y \forall z \forall Q. \big[P(x,y) \Rightarrow Q(x,y) \wedge \big((\exists z. P(x,z) \wedge Q(z,y)) \Rightarrow Q(x,y)\big)\big] \Rightarrow V(x,y) \Rightarrow Q(x,y)$$